

## RESSORT EN ROTATION

On considère un mobile quasi ponctuel  $M$ , de masse  $m$  qui peut se déplacer sans frottement le long d'un axe ( $OM$ ) toujours horizontal et mis en rotation uniforme autour de l'axe  $Oz$  vertical, la vitesse angulaire étant nommée  $\omega = \dot{\theta} = Cte$ .

Le point  $M$  est relié à  $O$  par l'intermédiaire d'un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0 = r_0$ .

On a représenté la base cylindro polaire mobile sur les figures.

Pour les applications numériques, on prendra  $r_0 = 20,0$  cm,  $m = 100$  g et  $k = 20$  N.m<sup>-1</sup>.

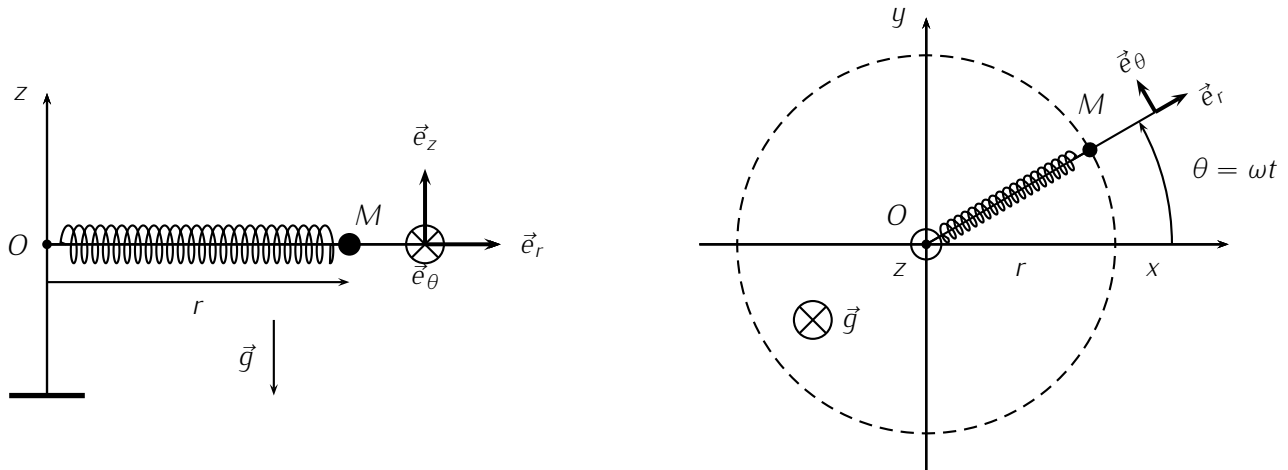


FIGURE 1 – Masse liée à ressort en rotation uniforme

### A. Cinématique

1. Rappeler l'expression la plus générale du vecteur position  $\overrightarrow{OM}$ , du vecteur vitesse  $\vec{v}$  et du vecteur accélération d'un point matériel  $M$  dans le système de coordonnées cylindro-polaires ( $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ ).
2. Que devient cette dernière expression dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme?

Q1

Q2

### B. Mouvement circulaire

Dans un premier temps, on suppose que  $M$  est immobile **par rapport à la tige en rotation** ( $r = r_e = Cte$ ) c'est à dire qu'il est animé d'un mouvement circulaire uniforme, de rayon  $r_e$  dans le référentiel lié au sol qu'on considérera comme galiléen.

1. Par application du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel lié au sol, déterminer l'expression de  $\vec{R}$  la réaction de l'axe sur  $M$  en fonction des données et des vecteurs de la base cylindro-polaire.
2. Que peut-on dire de l'énergie mécanique du système dans le référentiel galiléen? Justifiez.
3. Déterminer l'expression de  $r_e$  en fonction des données  $\omega$ ,  $k$ ,  $m$  et  $r_0$ .
4. L'expression de  $r_e$  est-elle valable quelle que soit la valeur de  $\omega$ ? Montrer qu'il existe une valeur particulière de  $\omega$ , notée  $\omega_e$ . Calculer sa valeur numérique.
5. L'expression de la force élastique exercée par le ressort n'est valable que si l'allongement du ressort, ici égal à  $r - r_0$  reste inférieur à  $\frac{r_0}{2}$ .  
Exprimer, en fonction de  $\omega_e$ , la valeur maximale  $\omega_M$  de  $\omega$  pour que l'expression de  $r_e$  établie à la question 3. soit valable.
6. Calculer  $\omega_M$  et la valeur de  $r_e$  pour  $\omega = 0,8\omega_M$ .

Q3

Q4

Q5

Q6

Q7

Q8

### C. Mouvement hors équilibre

On étudie maintenant le mouvement de  $M$  autour de sa position d'équilibre sur la tige en rotation ( $r \neq Cte$ ). On posera  $x = r - r_e$ .

Pour les applications numériques, on prendra  $\omega = \frac{0,8\omega_M}{2}$ .

1. Quelle est la nouvelle expression de  $\vec{R}$  la réaction de l'axe sur  $M$  en fonction des données, des vecteurs de base et de dérivées temporelles ?
2. Montrez que l'énergie mécanique n'est pas constante. Comment en pratique maintient-on  $\dot{\theta} = \omega$  constante ?
3. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par  $r$ .
4. En déduire celle vérifiée par  $x = r - r_e$ .
5. Représentez l'allure de la trajectoire de  $M$  dans le référentiel lié au sol si  $\omega = 0,4 \cdot \omega_M < \omega_e$
6. Exprimez la pulsation  $\Omega$  et la période  $T$  des oscillations de  $M$  en fonction de  $\omega$  et  $\omega_e$ . Commentez cette expression selon les valeurs de  $\omega$ . Calculez  $T$ .
7. Quelle est la relation liant  $\omega$  et  $\Omega$  pour que la trajectoire de  $M$  dans le référentiel local soit une courbe fermée ?

### D. Un petit penchant pour la difficulté ?

On incline maintenant d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale la tige sur laquelle coulisse  $M$  sans frottement. La longueur du ressort,  $OM$  est maintenant notée  $l$  (longueur à vide  $l_0 = 20,0$  cm) alors que  $r = HM$  où  $H$  est le projeté de  $M$  sur l'axe  $Oz$ .

Pour les applications numériques, on prendra  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\omega = \frac{0,8\omega_M}{2}$  et  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ .

1. Dans un premier temps, on maintient la tige immobile dans le référentiel lié au sol :  $\omega = 0$  et  $l = Cte$ .  
Quelle est, en fonction des données, l'expression de
  - (a)  $l_1$  la valeur de  $l$  à l'équilibre ?
  - (b)  $\vec{R}$  la réaction du support ?
2. On met à nouveau la tige en rotation, à la vitesse angulaire  $\omega = Cte$ .  
Quelle est, en fonction des données, l'expression de  $l_2$  la valeur de  $l$  quand  $M$  est immobile par rapport à la tige ? Vérifiez votre expression en comparant à la valeur de  $r_e$  trouvée en B. 3.

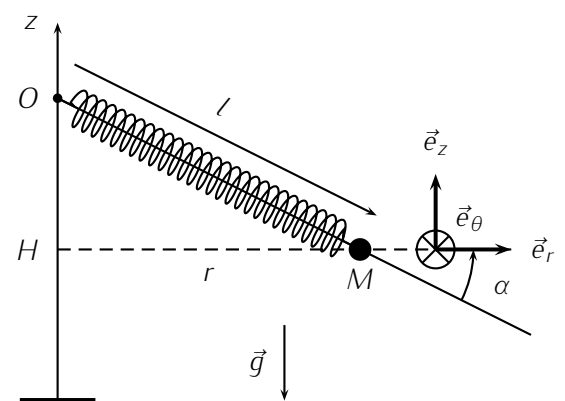


FIGURE 2 – Tige inclinée