DEVOIR MAISON 6 (Réduction)

Corrigé

Problème 1 : Décomposition de Dunford *(CCINP MP 2021)*

Q1 a) La matrice M est triangulaire donc son polynôme caractéristique est $\chi_M = (X-1)(X-2)$. Comme χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème admis, on en déduit que :

$$\boxed{M \text{ admet une décomposition de Dunford dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$

Bien qu'on ait $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ diagonalisable (car son polynôme caractéristique est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$) et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente (car de carré nul), le couple $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ n'est pas la décomposition de Dunford de M car ces deux matrices ne commutent pas.
On a en effet $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Le couple de matrices } \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ n'est pas le décomposition de Dunford de } M.}$$

Q1 b) ⋆ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que A est diagonalisable.
On a $A = A + 0_n$, la matrice A est diagonalisable, la matrice 0_n est nilpotente (car $0_n^1 = 0_n$) et $A0_n = 0_n = 0_nA$.
Donc :

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est diagonalisable alors } (A, 0_n) \text{ est sa décomposition de Dunford.}}$$

⋆ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que A est nilpotente.
On a $A = 0_n + A$, la matrice 0_n est diagonalisable (car diagonale), la matrice A est nilpotente et $0_nA = 0_n = A0_n$.
Donc :

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est nilpotente alors } (0_n, A) \text{ est sa décomposition de Dunford.}}$$

Comme la matrice M est diagonalisable (puisque son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples), on en déduit que :

$$\boxed{\text{la décomposition de Dunford de la matrice } M \text{ est } (M, 0_2).}$$

Q1 c) On sait par le cours que toute matrice trigonalisable sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ a un polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$ donc par le théorème, admet une décomposition de Dunford dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\boxed{\text{Toute matrice trigonalisable admet une décomposition de Dunford.}}$$

Q2 Notons $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
On a $\chi_A = \begin{vmatrix} X & 1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = X^2 + 1$ qui n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ (car c'est un trinôme du second degré de discriminant strictement négatif).

$$\boxed{\text{Le polynôme caractéristique de la matrice } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ n'est pas scindé sur } \mathbb{R}.}$$

Q3 En développant par rapport à la deuxième colonne, on a :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -8 \\ -3 & X+1 & -6 \\ 2 & 0 & X+5 \end{vmatrix} = (X+1)\begin{vmatrix} X-3 & -8 \\ 2 & X+5 \end{vmatrix} = (X+1)((X-3)(X+5)+16)$$
$$= (X+1)(X^2+2X+1) = (X+1)(X+1)^2$$

$$\boxed{\chi_A = (X+1)^3}.$$

Comme χ_A est un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\text{la matrice } A \text{ admet une unique décomposition de Dunford}}$ notée (D, N).
On sait de plus que $\chi_D = \chi_A = (X+1)^3$.
Ainsi, la matrice D est une matrice diagonalisable qui a pour seule valeur propre -1. Il existe donc $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $D = P(-I_3)P^{-1} = -PP^{-1} = -I_3$.
On a donc nécessairement $N = A - D = A + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la décomposition de Dunford de } A \text{ est le couple } \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\right)}.$$

Q4 On a $A^2(A^2 - I_n) = A^2(A - I_n)(A + I_n) = 0_n(A + I_n) = 0_n$.
Ainsi :

$$\boxed{X(X-1) \text{ est un polynôme annulateur de } A^2.}$$

Posons $D = A^2$ et $N = A - A^2$.
Vérifions que le couple (D, N) vérifie les quatre propriétés d'une décomposition de Dunford.
On a bien $D + N = A$.
La matrice D est diagonalisable car D admet un polynôme annulateur scindé à racines simples (d'après ce qui précède).
On a $A^2(A - I_n) = 0_n$ donc $A^3 = A^2$ et donc $A^4 = A^3 = A^2$.
On a $N^2 = (A - A^2)^2 = A^2 - 2A^3 + A^4$ car A et A^2 commutent.
Ainsi, $N^2 = A^2 - 2A^2 + A^2 = 0_n$. Donc N est nilpotente.
La matrice D et N commutent car ce sont des polynômes en A.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la décomposition de Dunford de } A \text{ est } (A^2, A - A^2).}$$

Q5 Vérifions que le couple (PDP^{-1}, PNP^{-1}) vérifie les quatre propriétés de la décomposition de Dunford de A.
On a $PDP^{-1} + PNP^{-1} = P(D+N)P^{-1} = PBP^{-1} = A$ car $B = D + N$.
La matrice D est diagonalisable et les matrices PDP^{-1} et D sont semblables donc la matrice PDP^{-1} est diagonalisable.
La matrice N est nilpotente donc il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0_n$.
On a alors $(PNP^{-1})^p = PN^pP^{-1} = P0_nP^{-1} = 0_n$.
On en déduit que la matrice PNP^{-1} est nilpotente.
Enfin, $(PDP^{-1})(PNP^{-1}) = PDNP^{-1} = PNDP^{-1} = (PNP^{-1})(PDP^{-1})$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la décomposition de Dunford de } A \text{ est } (PNP^{-1}, PDP^{-1}).}$$

Q6 Déterminons le polynôme caractéristique de A.
Par les opérations $C_3 \leftarrow C_3 + C_2$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, on obtient :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & 1 & -1 \\ -2 & X & -1 \\ -1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-3 & 1 & 0 \\ -2 & X & X-1 \\ -1 & 1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} X-3 & 1 & 0 \\ -2 & X & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (X-1)\begin{vmatrix} X-3 & 1 & 0 \\ -1 & X-1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} X-3 & 1 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix}$$
$$= (X-1)((X-3)(X-1)+1) = (X-1)(X^2-4X+4) = (X-1)(X-2)^2.$$

Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$.
On a $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$, la valeur propre 1 est simple et la valeur propre 2 est double.
Étudions si $\dim(E_2) = 2$ où $E_2 = \ker(A - 2I_3)$.
On a $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
On sait que $\mathrm{rg}(A - 2I_3) \leq 2$ car 2 est une valeur propre de A et les colonnes 2 et 3 ne sont pas colinéaires donc $\mathrm{rg}(A - 2I_3) \geq 2$. Donc $\mathrm{rg}(A - 2I_3) = 2$.
Par le théorème du rang appliqué avec l'endomorphisme $u - 2\mathrm{id}$, on a :

$$\dim(E_2) = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})) - \mathrm{rg}(A - 2I_3) = 3 - 2 = 1.$$

Comme $\dim(E_2) \neq m_2$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la matrice } A \text{ n'est pas diagonalisable dans } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$$

Q7 $\star$ Déterminons une base de $E_1 = \ker(u - \mathrm{id}) = \ker(A - I_3)$.
Comme 1 est une valeur propre simple de A, on sait que $\dim(E_1) = 1$.
On a $A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On remarque que $(A - I_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{3,1}$ donc en posant $\boxed{e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$, on a $e_1 \in \ker(u - \mathrm{id})$.
Ainsi, la famille (e_1) est une famille libre de $\ker(u - \mathrm{id})$ (car constituée d'un seul vecteur non nul) et de cardinal $1 = \dim(\ker(u - \mathrm{id}))$ donc c'est une base de $\ker(u - \mathrm{id})$.
On a donc $\boxed{\ker(u - \mathrm{id}) = \mathrm{vect}(e_1).}$
$\star$ Déterminons de même une base de $E_2 = \ker(u - 2\mathrm{id}) = \ker(A - 2I_3)$.
On a montré que $\dim(E_2) = 1$.

On remarque de plus que $(A - 2I_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{3,1}$ donc en posant $\boxed{e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$ et en raisonnant comme précédemment, on montre que (e_2) est une base de $\ker(u - 2\mathrm{id})$.
On a donc $\boxed{\ker(u - 2\mathrm{id}) = \mathrm{vect}(e_2).}$
$\star$ On a $(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Comme toutes les colonnes sont colinéaires à la première, qui est non nulle, on a $\mathrm{rg}(A - 2I_3)^2 = 1$ donc par le théorème du rang, $\dim(\ker(u - 2\mathrm{id})^2) = 3 - 1 = 2$.

$(A - 2I_3)^2 e_2 = 0_{3,1}$ et $(A - 2I_3)^2 e_3 = 0_{3,1}$ en posant $\boxed{e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

Ainsi, la famille (e_2, e_3) est une famille libre de $\ker(u - 2\mathrm{id})^2$ (car constituée de deux vecteurs non colinéaires), de cardinal $2 = \dim(\ker(u - 2\mathrm{id})^2)$ donc c'est une base de $\ker(u - 2\mathrm{id})^2$.
On a donc $\boxed{\ker(u - 2\mathrm{id})^2 = \mathrm{vect}(e_2, e_3).}$

⋆ La famille (e_1, e_2, e_3) est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (car échelonnée) et de cardinal $3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$ donc $\boxed{\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3) \text{ est une base de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

⋆ Comme $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, en fractionnant cette base, on obtient que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{vect}(e_1) = \ker(u - \mathrm{id})$ et $\mathrm{vect}(e_2, e_3) = \ker(u - 2\mathrm{id})^2$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u - 2\mathrm{id})^2.}$$

Comme $e_1 \in E_1$, on a $u(e_1) = e_1$ et comme $e_2 \in E_2$, on a $u(e_2) = 2e_2$.

De plus, $u(e_3) = Ae_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e_2 + 2e_3$.

On en déduit que :

$$\boxed{\text{la matrice de } u \text{ dans la base } \mathscr{B} \text{ est } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

Q8 Posons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $D + N = B$, la matrice D est diagonalisable (car diagonale), la matrice N est nilpotente (car $N^2 = 0_3$) et $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$.

On en déduit que :

$$\boxed{\text{la décomposition de Dunford de la matrice } B \text{ est } \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right).}$$

L'endomorphisme u a pour matrice A dans la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et pour matrice B dans la base $\mathscr{B}$.

En notant $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$, on a par les relations de changement de base, $A = PBP^{-1}$.

En utilisant la question Q18, on en déduit que la décomposition de Dunford de la matrice A est (PDP^{-1}, PNP^{-1}).

On sait que P^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base canonique $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

On a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_1 + e_2 + e_3$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 - e_3$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3$ d'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On calcule alors PDP^{-1} et PNP^{-1} et on obtient que :

$$\boxed{\text{la décomposition de Dunford de la matrice } A \text{ est } \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right).}$$

Q9 Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, on a :

$$\frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x-2} + \frac{\gamma}{(x-2)^2} = \frac{\alpha(x-2)^2 + \beta(x-1)(x-2) + \gamma(x-1)}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{(\alpha+\beta)x^2 + (-4\alpha - 3\beta + \gamma)x + 4\alpha + 2\beta - \gamma}{(x-1)(x-2)^2}$$

d'où :

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{x-2}+\frac{\gamma}{(x-2)^2}\iff 1=(\alpha+\beta)x^2+(-4\alpha-3\beta+\gamma)x+4\alpha+2\beta-\gamma.$$

Cette dernière égalité est vérifiée pour tout $x\in\mathbb{R}\smallsetminus\{1,2\}$ (soit pour une infinité de réels) si et seulement si les deux polynômes sont égaux c'est-à-dire ont les mêmes cœfficients dans la base canonique i.e. :

$$\begin{cases}\alpha+\beta &= 0\\ -4\alpha-3\beta+\gamma &= 0\\ 4\alpha+2\beta-\gamma &= 1\end{cases}\iff\begin{cases}\alpha+\beta &= 0\\ -4\alpha-3\beta+\gamma &= 0\\ -\beta &= 1 \quad L_3\leftarrow L_3+L_2\end{cases}\iff\begin{cases}\alpha=1\\ \gamma=1\\ \beta=-1.\end{cases}$$

Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}\smallsetminus\{1,2\}$, on a :

$$\boxed{\frac{1}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{1}{x-1}+\frac{-1}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}.}$$

En multipliant par $(x-1)(x-2)^2$, on obtient pour tout $x\in\mathbb{R}\smallsetminus\{1,2\}$:

$$1=(x-2)^2-(x-1)(x-2)+(x-1).$$

Comme cette égalité polynômiale est vraie pour une infinité de valeurs, les deux polynômes sont égaux :

$$(X-1)(1-X+2)+(X-2)^2=1.$$

D'où en posant $\boxed{U(X)=3-X \text{ et } V(X)=1}$, on a :

$$\boxed{(X-1)U(X)+(X-2)^2V(X)=1 \text{ avec } \deg U=1<2 \text{ et } \deg V=0<1.}$$

Q10 ⋆ On a par les opérations sur les polynômes d'endomorphismes :

$$p=[V(X)(X-2)^2](u) \text{ et } q=[U(X)(X-1)](u) \text{ donc } p+q=[\underbrace{V(X)(X-2)^2+U(X)(X-1)}_{=1}](u)=\mathrm{id}.$$

On a donc :

$$\boxed{p+q=\mathrm{id} \text{ et pour tout } x\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ p(x)+q(x)=\mathrm{id}(x)=x.}$$

⋆ On a vu à la question Q7 que $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})=\ker(u-\mathrm{id})\oplus\ker(u-2\mathrm{id})^2$.
Soit $x\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Il existe un unique couple $(x_1,x_2)\in\ker(u-\mathrm{id})\times\ker(u-2\mathrm{id})^2$ tel que $x=x_1+x_2$.
Remarquons que $(u-2\mathrm{id})^2(x_2)=0_{3,1}$ donc $p(x_2)=V(u)(0_{3,1})=0_{3,1}$ et $(u-\mathrm{id})(x_1)=0_{3,1}$ donc $q(x_1)=U(u)(0_{3,1})=0_{3,1}$.
De plus, $p(x_1)+q(x_1)=x_1$ donc $p(x_1)=x_1$ et $p(x_2)+q(x_2)=x_2$ donc $q(x_2)=x_2$.
Ainsi, par linéarité de p, $p(x)=p(x_1)+p(x_2)=x_1+0_{3,1}=x_1$ et $q(x)=q(x_1)+q(x_2)=0_{3,1}+x_2=x_2$.
On en déduit que :

$$\boxed{p \text{ est le projecteur sur } \ker(u-\mathrm{id}) \text{ parallèlement à } \ker(u-2\mathrm{id})^2 \text{ et } q \text{ est la projection associée.}}$$

Q11 ⋆ Comme $e_1\in\ker(u-\mathrm{id})$, on a $p(e_1)=e_1$ et $q(e_1)=0_{3,1}$ donc $d(e_1)=p(e_1)+2q(e_1)=e_1$.
Comme $e_2\in\ker(u-2\mathrm{id})^2$, on a $p(e_2)=0_{3,1}$ et $q(e_2)=e_2$ donc $d(e_2)=p(e_2)+2q(e_2)=2e_2$.
Comme $e_3\in\ker(u-2\mathrm{id})^2$, on a de même $d(e_3)=2e_2$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{la matrice de } d \text{ dans la base } \mathscr{B} \text{ est } \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}.}$$

$\star$ La matrice de d dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale donc par définition, $\boxed{\text{l'endomorphisme } d \text{ est diagonalisable}}$.

La matrice de $(u-d)^2$ dans la base $\mathscr{B}$ est $\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\right)^2 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}^2 = 0_3$ donc $\boxed{(u-d)^2 = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))}}$.

$\boxed{\text{Les endomorphismes } d \text{ et } u-d \text{ commutent}}$ car ce sont des polynômes en u (car p et q sont des polynômes en u).

$\star$ On note D la matrice de d et N la matrice de $u-d$ dans la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Comme $u = d + (u-d)$, on a $A = D + N$.
Comme d est diagonalisable, D est diagonalisable.
Comme $(u-d)^2 = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))}$, on a $N^2 = 0_3$ donc N est nilpotente.
Comme d et $u-d$ commutent, D et N commutent.
On en déduit que (D,N) est la décomposition de Dunford de A.
On a $d = p + 2q = (p+q) + q = \mathrm{id} + (3\mathrm{id} - u) \circ (u - \mathrm{id})$, on a :

$$D = I_3 + (3I_2 - A)(A - I_3) = I_3 + (-A^2 + 4A - 3I_3) = -A^2 + 4A - 2I_3.$$

Par suite, $N = A - D = A^2 - 3A + 2I_3$.

$$\boxed{\text{La décomposition de Dunford de la matrice } A \text{ est } (-A^2 + 4A - 2I_3, A^2 - 3A + 2I_3).}$$

Problème 2 : Deux démonstrations du théorème de Cayley-Hamilton
Méthode 1 : par les matrices compagnons

Q1 a) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, posons $u_k = f^k(x)$.
On a pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, $f(u_k) = f(f^k(x)) = f^{k+1}(x) = u_{k+1}$.
Pour $k = n-1$, on a $f(u_{n-1}) = f(f^{n-1}(x)) = f^n(x)$.
Comme $\mathscr{B}$ est une base de E, il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $f^n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_k$.
On en déduit la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$:

$$\boxed{\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}}.$$

Q1 b) Notons $A = \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(f)$.

Les polynômes caractéristiques de f et A sont égaux donc $\chi_f = \det(XI_n - A) = \begin{vmatrix} X & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ -1 & X & & \vdots & -a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & X & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X - a_{n-1} \end{vmatrix}$.

Par l'opération $L_1 \leftarrow \sum_{k=1}^{n} X^{k-1} L_k$, on obtient :

$$\chi_f = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & P(X) \\ -1 & X & & \vdots & -a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & X & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X - a_{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{où } P(X) = -\sum_{k=1}^{n-1} a_{k-1} X^{k-1} + X^{n-1}(X - a_{n-1}).$$

En développant par rapport à la première ligne, on obtient :

$$\chi_f = (-1)^{n+1}P(X)(-1)^{n-1} = P(X)$$

car le déterminant de taille $n-1$ obtenu est celui d'une matrice triangulaire supérieure dont tous les cœfficients diagonaux valent -1.
Ainsi :

$$\boxed{\chi_f = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k.}$$

Q1 c) On a $\chi_f(f) = f^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k f^k$ donc :

$$\chi_f(f)(x) = f^n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x) = f^n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_k = 0_E$$

d'après Q1a).
Ainsi :

$$\boxed{\chi_f(f)(x) = 0_E.}$$

Q2 a) Considérons l'ensemble $A = \{\ell \in \mathbb{N}^*, \big(x, f(x), \ldots, f^{\ell-1}(x)\big) \text{ est libre}\}$.
On constate que A est une partie de $\mathbb{N}$ qui a les propriétés suivantes :

- A est non vide car la famille (x) est libre puisque $x \neq 0_E$ donc $1 \in A$,
- A est majorée par n puisque si $\ell \in A$, $\big(x, f(x), \ldots, f^{\ell-1}(x)\big)$ est une famille libre de E donc son cardinal, qui est égal à ℓ, est inférieur à la dimension de E, qui est égale à n.

On en déduit que A admet un maximum k qui est compris entre 1 et n.
Pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, on note désormais $e_j = f^j(x)$.
Pour tout $j \in [\![0, k-2]\!]$, $f(e_j) = f(f^j(x)) = f^{j+1}(x) = e_{j+1}$ donc $f(e_j) \in \text{Vect}(\mathscr{F})$.
De plus, par définition de k, la famille $\big(x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x)\big)$ est libre et la famille $\big(x, f(x), \ldots, f^k(x)\big)$ est liée donc $f(e_{k-1}) = f^k(x) \in \text{Vect}(\mathscr{F})$.
Comme pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, $f(e_i) \in \text{Vect}(\mathscr{F})$, on en déduit par linéarité de f que $\text{Vect}(\mathscr{F})$ est stable par f.
Ainsi :

$$\boxed{\text{il existe un entier } k \text{ compris entre 1 et } n \text{ tel que } \mathscr{F} = \big(x, f(x), \ldots, f^k(x)\big) \text{ est libre et } \text{Vect}(\mathscr{F}) \text{ est stable par } f.}$$

Q2 b) On note toujours pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, $e_j = f^j(x)$.
Comme la famille $(e_0, \ldots, e_{k-1})$ est une famille libre de E, par le théorème de la base incomplète, on peut compléter cette famille en une base $\mathscr{B} = (e_0, \ldots, e_{n-1})$ de E (car $\dim(E) = n$).
Comme $\text{Vect}(e_0, \ldots, e_{k-1})$ est stable par f, on sait par le cours que la matrice de f dans cette base est triangulaire par blocs :

$$\boxed{\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ (0) & C \end{pmatrix} \text{ avec } A = \mathscr{M}at_{\mathscr{F}}(\widetilde{f}) \text{ où } \widetilde{f} \text{ est l'endomorphisme induit par } f \text{ sur } F = \text{Vect}(\mathscr{F}).}$$

Q2 c) Calculons le polynôme caractéristique de f en calculant celui de la matrice obtenue à la question précédente. Comme la matrice est triangulaire par blocs, on a :

$$\chi_f = \begin{vmatrix} XI_k - A & -B \\ (0) & XI_{n-k} - C \end{vmatrix} = \det(XI_k - A)\det(XI_{n-k} - C) = \chi_A \cdot \chi_C = \chi_{\widetilde{f}} \cdot \chi_C = \chi_C \cdot \chi_{\widetilde{f}}.$$

Ainsi, $\chi(f) = \chi_C(f) \circ \chi_{\widetilde{f}}(f)$ donc $\chi(f)(x) = \chi_C(f)\big(\chi_{\widetilde{f}}(f)(x)\big)$.
Comme $x \in F$, on a aussi $\chi_{\widetilde{f}}(f)(x) = \chi_{\widetilde{f}}(\widetilde{f})(x) = 0_E$ en appliquant la question 1 avec $\widetilde{f} \in \mathscr{L}(F)$.

Ainsi, $\chi_f(f)(x) = \chi_C(f)(0_E) = 0_E$.

$$\boxed{\chi_f(f)(x) = 0_E.}$$

Q3 On a montré que pour tout vecteur x non nul, $\chi_f(f)(x) = 0_E$ et ceci est encore vrai pour le vecteur nul car $\chi_f(f) \in \mathscr{L}(E)$.
On en déduit que :

$$\boxed{\chi_f(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

Méthode 2 : par trigonalisation

Q4 Par le théorème de d'Alembert-Gauss, le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{C}$ donc u est trigonalisable.
Ainsi :

$$\boxed{\text{il existe une base } \mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n) \text{ de } \mathbb{C}^n \text{ telle que } T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \text{ est triangulaire supérieure.}}$$

Q5 Comme A et T représentent un même endomorphisme dans deux bases, elles sont semblables donc $\chi_A = \chi_T$. Comme T est triangulaire, on en déduit que :

$$\boxed{\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i).}$$

Q6 Par lecture sur la matrice T, on a $u(e_1) = \lambda_1 e_1$.
On a donc $P_1(u)(e_1) = (u - \lambda_1 \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})(e_1) = u(e_1) - \lambda_1 e_1 = 0_{\mathbb{C}^n}$.
Soit $x \in \mathrm{Vect}(e_1)$. Il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $x = \alpha e_1$.
On a donc par linéarité, $P_1(u)(x) = \alpha P_1(u)(e_1) = 0_{\mathbb{C}^n}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathrm{Vect}(e_1),\ P_1(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}.}$$

Q7 a) Soit $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$. On a $P_k(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}$.
Comme $P_{k+1} = (X - \lambda_{k+1})P_k$, on a $P_{k+1}(u) = (u - \lambda_{k+1}\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}) \circ P_k(u)$ donc :

$$P_{k+1}(u)(x) = (u - \lambda_{k+1}\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})\big(P_k(u)(x)\big) = (u - \lambda_{k+1}\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})\big(0_{\mathbb{C}^n}\big) = 0_{\mathbb{C}^n}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k),\ P_{k+1}(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}.}$$

Q7 b) Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]$, on note $t_{i,j}$ le cœfficient de la matrice T d'indice (i, j).
Comme la matrice T est triangulaire supérieure, si $i > j$ alors on a $t_{i,j} = 0$.
Par lecture sur la matrice, on a donc :

$$u(e_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} t_{i,k+1} e_i = \sum_{i=1}^{k} t_{i,k+1} e_i + \lambda_{k+1} e_{k+1}.$$

On a donc $(u - \lambda_{k+1}\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})(e_{k+1}) = u(e_{k+1}) - \lambda_{k+1} e_{k+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} t_{i,k+1} e_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

$$\boxed{(u - \lambda_{k+1}\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})(e_{k+1}) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k).}$$

Q7 c) D'après la question b), on peut appliquer $\mathscr{P}(k)$ avec $x = (u - \lambda_{k+1}\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})(e_{k+1})$.
On obtient que $P_k(u)\big((u - \lambda_{k+1}\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})(e_{k+1})\big) = 0_{\mathbb{C}^n}$ c'est-à-dire $P_k(u) \circ (u - \lambda_{k+1}\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})(e_{k+1}) = 0_{\mathbb{C}^n}$.
Or, $P_k(u) \circ (u - \lambda_{k+1}\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}) = \big(P_k(X - \lambda_{k+1})\big)(u) = P_{k+1}(u)$.
D'où :

$$\boxed{P_{k+1}(u)(e_{k+1}) = 0_{\mathbb{C}^n}.}$$

Q7 d) On a donc prouvé que pour tout $j \in [\![1, k+1]\!]$, $P_{k+1}(u)(e_j) = 0_{\mathbb{C}^n}$.
Comme $P_{k+1}(u)$ est linéaire, on en déduit que :

$$\boxed{\mathscr{P}(k+1) \ : \ \forall x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{k+1}),\ P_{k+1}(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}.}$$

Q8 On a montré $\mathscr{P}(1)$ à la question 6 et pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ implique $\mathscr{P}(k+1)$ d'après la question 7.
Par récurrence (finie), on en déduit que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\forall x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k),\ P_k(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}.$$

En particulier, pour tout $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$, $P_n(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}$.
Comme $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n) = \mathbb{C}^n$ et $P_n = \chi_A$, on en déduit que $\chi_A(u) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{C}^n)}$.
Comme $\chi_A(A)$ est la matrice de $\chi_A(u)$ dans la base canonique, on en déduit que :

$$\boxed{\chi_A(A) = 0_n.}$$