DM7 (SÉRIES ENTIÈRES)
Pour le vendredi 22 décembre

PROBLÈME 1 (NIVEAU 1)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Q1. On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre en la fonction inconnue y de la variable réelle x :

$$(\mathscr{E}_\lambda): \quad x(x+1)y''(x) + (2x+1)y'(x) - \lambda(\lambda+1)y(x) = 0,$$

où λ désigne un paramètre réel supérieur ou égal à $-\frac{1}{2}$ et non entier.
Soit y une fonction de la variable réelle x, admettant un développement en série entière au voisinage de 0 avec $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

a. Montrer que, pour que y soit solution de l'équation $(\mathscr{E}_\lambda)$, il faut et il suffit que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \frac{(\lambda+n+1)(\lambda-n)}{(n+1)^2} a_n.$$

b. On suppose que y est une solution non identiquement nulle de $(\mathscr{E}_\lambda)$.
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

c. Montrer qu'il existe une unique solution de $(\mathscr{E}_\lambda)$, développable en série entière sur $]-1,1[$ et qui prend la valeur 1 en 0, et que ses cœfficients sont donnés par :

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ a_n = \frac{1}{(n!)^2} \prod_{k=-(n-1)}^{n} (\lambda + k).$$

Q2. Soit ψ la fonction de la variable réelle x définie par :

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + x\sin^2 t}\, \mathrm{d}t.$$

a. Montrer que pour tout $u \in]-1,1[$, on a $\sqrt{1+u} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} u^n$.

b. Montrer que ψ est développable en série entière de la variable x sur $]-1,1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t\, \mathrm{d}t \right) x^n.$$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t\, \mathrm{d}t$.
Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$.
Calculer I_0.
En déduire I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, ainsi que le développement de ψ en série entière de la variable x sur $]-1,1[$.

PROBLÈME 2 (NIVEAU 2)

Notations

$\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à cœfficients réels.
$(H_j)_{j\in\mathbb{N}}$ désigne la famille de polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $H_j = \dfrac{1}{j!}\displaystyle\prod_{i=0}^{j-1}(X-i)$.
Pour $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, on note $\dbinom{n}{k}$ le cœfficient binomial k parmi n. On a $\dbinom{0}{0} = 1$ et $\dbinom{n}{k} = 0$ si $k > n$.
$[\![a,b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre a et b. Ainsi, $[\![a,b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant n \leqslant b\}$.

A. Une première formule

Q1. Donner sans démonstration le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^n$.

Q2. En déduire le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} nx^n$.

Q3. Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\binom{n}{k}x^n$ admet 1 pour rayon de convergence et que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

B. Utilisation d'une famille de polynômes

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $f_k : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n$.

Q4. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est définie sur $]-1,1[$.

Q5. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $(H_0,\dots,H_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$ et qu'il existe une unique famille $(\alpha_{k,0},\dots,\alpha_{k,k})$ dans $\mathbb{R}^{k+1}$ telle que $X^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}H_j$.

Q6. Pour $k \in \mathbb{N}$, donner les valeurs de $\alpha_{k,0}$ et $\alpha_{k,k}$.

Q7. Pour tout couple $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leqslant j \leqslant k$, montrer que $\alpha_{k,j} = j^k - \displaystyle\sum_{i=0}^{j-1}\binom{j}{i}\alpha_{k,i}$.

Q8. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme réel P_k tel que, pour tout $x \in]-1,1[$, $f_k(x) = \dfrac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$ et que ce polynôme vérifie la relation

$$P_k = \sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}X^j(1-X)^{k-j}.$$

Q9. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_{k+1} = X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k$.

Q10. Calculer explicitement P_2 et P_3.

Q11. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le degré de P_k ainsi que son cœfficient dominant.

Q12. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0,1[$, $x^{k+1} P_k\left(\frac{1}{x}\right) = P_k(x)$.

Q13. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, un lien entre les cœfficients de degré j et $k+1-j$ de P_k.

C. Une dernière formule

On s'intéresse dans cette sous-partie à la série entière $\sum_{n \geqslant 0} \binom{2n}{n} x^n$ dont on note R le rayon de convergence.

Q14. Déterminer R et montrer que, pour tout $x \in]-R, R[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

Q15. Montrer que, pour tout $x \in]-R, R[\setminus \{0\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Q16. En déduire que, pour tout $x \in]-R, R[\setminus \{0\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} x^n = \frac{1}{2x} \left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1 \right).$$

Q17. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1}.$$