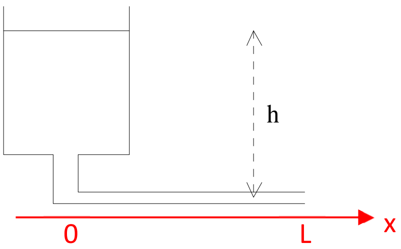
4.5 Forces dans les fluides-Exercice 5

Un récipient cylindrique vertical, de diamètre D = 5 cm, est terminé par un tube horizontal de diamètre d = 1 mm et de longueur L = 40 cm.
Un liquide visqueux et incompressible s'écoule lentement. Sa hauteur h passe de 5 cm à 2,5 cm en une heure et quart.



On admet que le débit dans le tube horizontal est donné par la loi de Poiseuille : $q_v = \frac{\Delta P}{128\eta L}\pi d^4$

où ΔP est la différence de pression entre les deux extrémités du tube.

Déterminer la viscosité cinématique du liquide.

Bilan de volume entre t et t+dt pour le liquide incompressible dans le récipient :

Volume à t+dt = Volume à t – Volume sorti pendant dt $\Rightarrow \pi\frac{D^2}{4}h(t+dt) = \pi\frac{D^2}{4}h(t) - q_v dt$

$$\Rightarrow \pi\frac{D^2}{4}\frac{dh}{dt} = -\frac{\Delta P}{128\eta L}\pi d^4$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} + \frac{\Delta P}{32\eta L D^2}d^4 = 0$$

On cherche : $\Delta P = P(x=0) - P(x=L)$
La pression à la sortie du tube horizontal est : $P(L) = P_0$ (pression atmosphérique)
Puisque le liquide s'écoule lentement, on peut considérer qu'il est presque au repos dans le récipient.
La pression à l'entrée du tube horizontal est donnée par la loi de la statique des fluides : $P(0) = P_0 + \mu g h$
Donc : $\Delta P = \mu g h$

On a donc l'équation différentielle : $\frac{dh}{dt} + \frac{\mu g d^4}{32\eta L D^2}h = 0$

De solution : $h = h_0 e^{-t/\tau}$ avec : $\tau = \frac{32\eta L D^2}{\mu g d^4}$

On a : $h_0 = h(t=0) = 5\,\text{cm}$ et $h_1 = h(t_1 = 75\,\text{min}) = 2{,}5\,\text{cm}$

Donc : $\text{Ln}(\frac{h_1}{h_0}) = -\frac{t_1}{\tau} \Rightarrow \tau = \frac{t_1}{\text{Ln}(\frac{h_0}{h_1})}$

$$\Rightarrow \boxed{\nu = \frac{\eta}{\mu} = \frac{g d^4 t_1}{32 L D^2 \text{Ln}(\frac{h_0}{h_1})}}$$

A .N : <u>$\nu = 2.10^{-6}\ m^2.s^{-1}$</u>
