

Epreuve de modélisation CCINP PSI (2019) : corrigé

Partie I - Quel rapport entre masse et autonomie ?

Q1.

- La figure 3 montre un tube de courant de grande section « loin » au-dessus de l'hélice. Grande section équivaut à faible vitesse, l'air étant supposé de masse volumique uniforme, donc en écoulement incompressible. Et en effet, expérimentalement, en l'absence de vent ou de courant d'air, si on se place loin au-dessus de l'hélice, on n'en ressent quasiment pas les effets.
- Pour annuler la puissance des actions internes il faut en plus supposer l'écoulement parfait.
- En fait, l'approximation est ici contestable : on s'intéresse au drone en vol stationnaire, donc il serait surprenant que la vitesse dépasse $v_s = 10 \text{ m.s}^{-1}$. Et entre le haut de la figure 3 et le bas, le dénivelé doit approcher les $\Delta z = 1,0 \text{ m}$.
D'où $\Delta e_c \approx \frac{1}{2} v_s^2 \approx 50 \text{ J.kg}^{-1}$ et $\Delta e_p = g\Delta z \approx 10 \text{ J.kg}^{-1}$ ainsi $\frac{\Delta e_p}{\Delta e_c} \approx 20\%$!

Q2. Le système considéré est un système ouvert : la portion de tube de courant représenté sur la figure 3. Mais le bilan concernant ce système (qui se démontre, dans le cadre du programme, en passant par un système fermé, décomposé en plusieurs sous-systèmes), est donné : La relation (1) donne, compte tenu de Q1 : $D_m \left(\frac{v_s^2 - 0}{2} + \frac{P_0 - P_0}{\rho} \right) = P_u = P_m$ d'où $P_m = \frac{1}{2} D_m v_s^2$ (eq A).

Pour la relation (2), les actions extérieures appliquées au système sont (pesanteur négligée, cf Q1) :

\vec{F} force exercée par l'hélice sur l'air

$\vec{F}_p = \vec{0}$ résultante des forces de pression qui est nulle car la pression est uniforme sur la frontière du système

Alors la relation (2) donne $D_m (\vec{v}_s - \vec{0}) = F \vec{z}$, d'où $D_m v_s = F$. Or la puissance de la force est $P_m = F v_h = D_m v_s v_h$ (eq B)

Les équations (eq A) et (eq B) conduisent bien à $v_h = \frac{v_s}{2}$.

Q3. Par définition du débit massique, on a : $D_m = \rho S v_h = \frac{1}{2} \rho S v_s$ d'où $F = D_m v_s = \frac{1}{2} \rho S v_s^2$ donc $v_s = \sqrt{\frac{2F}{\rho S}}$

Ainsi $P_m = \frac{1}{2} D_m v_s^2 = \frac{1}{4} \rho S v_s^3 = \frac{1}{4} \rho S \left(\frac{2F}{\rho S} \right)^{3/2}$ ce qui donne bien $P_m = \frac{1}{\sqrt{2\rho S}} F^{3/2}$.

D'après le principe des actions réciproques, on a : $\vec{\Pi} = -\vec{F} = -F\vec{z} = -(\sqrt{2\rho S} P_m)^{2/3} \vec{z}$

Q4. Système : {drone + cordon} dans le référentiel terrestre, supposé galiléen

Bilan des forces :

- $-\vec{F}_c$ avec $M_{G_{z_0}}(-\vec{F}_c) = (\vec{G}\vec{B} \wedge (-\vec{F}_c)) \cdot \vec{z}_0 = -F_c \cdot GM \cdot \cos \alpha$
- $\vec{\Pi}$ avec $M_{G_{z_0}}(\vec{\Pi}) = (\vec{G}\vec{M} \wedge \vec{\Pi}) \cdot \vec{z}_0 = \Pi \cdot GM$
- $m \vec{g}$, poids du drone (en notant m sa masse), de moment nul par rapport à (G_{z_0}) , et on néglige le poids du cordon.
- Réaction de la tige sur le drone, de moment nul également si on suppose la liaison pivot parfaite.

Sachant que le drone est immobile, le théorème du moment cinétique appliqué en G , dans le référentiel terrestre, supposé galiléen donne $\vec{G}\vec{M} \wedge (\vec{\Pi} - \vec{F}_c) = \vec{0}$ d'où $(L\Pi - LF_c \cos \alpha) \vec{z}_0 = \vec{0}$ puis $\Pi = F_c \cos \alpha$

Q5. D'après Q4, dans le cas où $\alpha \ll 1$, on a : $\Pi \simeq F_c \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right)$

Si on considère $\Pi_{mesurée} = F_c$ alors on commet l'erreur relative suivante : $\varepsilon = \left| \frac{\Pi_{mesurée} - \Pi}{\Pi_{mesurée}} \right| = \frac{\alpha^2}{2}$

Dans le cas où $\alpha < 5^\circ = 9.10^{-2} \text{ rad}$ alors $\varepsilon < 0,4\%$ \Rightarrow le protocole expérimental est donc validé.

Q6. D'après la figure 5, l'ensemble des points de mesure se positionne autour d'une droite moyenne d'équation :

$$\ln P_e = q \ln \Pi + \beta \Leftrightarrow P_e = e^\beta \Pi^q = k \Pi^q \quad \text{en posant } k = e^\beta$$

Graphiquement on détermine : $q = \frac{4,3 - 2,3}{1,6} = 1,3$ et $\beta = 2,3 \Leftrightarrow k = 10 \text{ uSI}$

En Q3, on a trouvé $q = 1,5$. L'écart est principalement dû au fait que $P_m \neq P_e$: le rendement des moteurs n'est pas de 100%. Par ailleurs, à cause de la proximité avec le sol (ou la table sur laquelle est posée la maquette), le tube de courant n'a pas la forme de celui représenté en figure 3.

Q7.

En vol stationnaire (drone immobile) le principe fondamental de la dynamique appliqué au drone dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, et projeté sur la verticale ascendante conduit à :

$$4 \cdot \Pi - mg = 0 \text{ d'où } \Pi = \frac{mg}{4}, \text{ puisqu'il y a 4 hélices}$$

D'où l'expression de la puissance électrique consommée par un moteur : $P_e = k \left(\frac{mg}{4} \right)^q$

Puis la puissance consommée par l'ensemble des 4 moteurs : $P_{stat} = 4P_e = 4k \left(\frac{mg}{4}\right)^q$

La capacité Q d'une batterie est l'intégrale sur toute sa durée d'utilisation du courant qui y circule, donc en notant I le courant moyen, $Q = I \Delta t$. Et la puissance délivrée par la batterie est $P = UI$. D'où l'autonomie de la batterie : $\Delta t = \frac{Q}{I} = \frac{QU}{P_{stat}}$

AN : $P_{stat} = 50 \text{ W}$ $\Delta t = 36 \text{ min}$

Remarque : Cette valeur d'autonomie est supérieure à celle donnée en introduction du sujet (p.2) cela est sûrement dû au fait que la batterie n'assure pas une tension constante au cours de sa décharge.

Partie II – Peut-on se passer de la nacelle motorisée ?

Q8 : La flexibilité de l'élastomère et les surfaces de contact conduisent à modéliser chaque plot par une liaison sphère cylindre de centre le centre du plot et d'axe \vec{z}_e . En effet la rigidité des vis anti-chutes et le faible jeu entre l'élastomère et la vis en position basse permet de négliger les mouvements de translation associées aux mouvements transversaux et longitudinaux.

Nous avons ainsi une liaison tube-structure étoilée modélisée par 4 liaisons sphère cylindre en parallèle d'axe vertical. Les degrés de liberté prépondérants sont donc le mouvement vertical et les mouvements de roulis et de tangage (si on considère possible une légère déformation des plots) Ceci est conforme à la suite de l'étude, car seul le mouvement vertical est étudié en II.3 puis les trois degrés de liberté prépondérants en II.4.

Q9 : Sous charge statique axiale maximale, nous avons une hauteur $h=25 \text{ mm}$ contre une longueur à vide $H=42 \text{ mm}$. La course du plot choisi est donc de 17 mm , pour un effort axial maximal de 25 N . La raideur d'un plot est donc de **1470 N/m**.

Q10 Les 4 plots sont en parallèle, il suffit donc d'additionner les raideurs, ainsi que les coefficients de frottement visqueux, ainsi : **K=6 000N/m et C=4 kg/s**

Q11 On isole le tube, on fait le bilan des actions mécaniques extérieures :

- Action mécanique de la pesanteur : $-Mg\vec{z}$ (force verticale)
- Action du ressort : $K(l_0 - z_0)\vec{z}$ (force verticale en G)

On applique le principe fondamental de la statique et on écrit le théorème de la résultante statique selon \vec{z} . Il vient alors :

$$-Mg + K(l_0 - z_0) = 0 \text{ donc } z_0 = l_0 - \frac{Mg}{K}$$

Q12 On isole le tube, on fait le bilan des actions mécaniques extérieures :

- Action mécanique de la pesanteur : $-Mg\vec{z}$ (force verticale)
- Action de l'ensemble ressort / amortisseur : $K(l_0 - z_0 - z(t))\vec{z} - c\dot{z}(t)$
- Force d'excitation : $f(t)\vec{z}$

On applique le principe fondamental de la dynamique au tube dans son mouvement par rapport à 0 supposé galiléen et on écrit le théorème de la résultante dynamique sur \vec{z}

$$M\ddot{z}(t) = -Mg + f(t) - K(z_0 + z(t) - l_0) - C\dot{z}(t)$$

$$M\ddot{z}(t) = -Mg + f(t) - Kz(t) + K(-z_0 + l_0) - C\dot{z}(t) \quad M\ddot{z}(t) = f(t) - Kz(t) - C\dot{z}(t)$$

$$M\ddot{z}(t) + Kz(t) + C\dot{z}(t) = f(t)$$

Q13 En supposant les conditions initiales nulles, on obtient dans le domaine symbolique de Laplace :

$$Mp^2Z(p) + KZ(p) + CpZ(p) = F(p) \quad \frac{Z(p)}{F(p)} = \frac{1}{Mp^2 + Cp + K}$$

$$\frac{Z(p)}{F(p)} = \frac{\frac{1}{K}}{1 + \frac{C}{K}p + \frac{M}{K}p^2}$$

On obtient un système du second ordre de la forme : $\frac{A}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$

Par identification : $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{1}{2} \frac{C}{K} \sqrt{\frac{K}{M}} = \frac{C}{2\sqrt{KM}}$

Q14 Numériquement, on obtient $\xi = \frac{C}{2\sqrt{KM}} = 0,047$

Ce coefficient d'amortissement est très faible. La pulsation de résonance sera donc quasiment égale à la pulsation propre non

amortie $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} = 141 \text{ rad/s} = 22,5 \text{ Hz}$.

Cette fréquence est en dessous de la fréquence du premier mode propre de la structure étoilée. Pour positionner cette résonance, le concepteur peut donc agir sur les paramètres physiques C (coefficient de viscosité), K (raideur des plots) et M (masse du tube).

Q15 : D'après la figure 16 :

$\tan \varphi = \frac{-z_A^{\tan \text{ gage}}}{\frac{b}{2}}$ au premier ordre : $z_A^{\tan \text{ gage}} = -\frac{b}{2} \varphi$

$\sin \theta = \frac{z_A^{\text{roulis}}}{\frac{a}{2}}$ au premier ordre $z_A^{\text{roulis}} = \frac{a}{2} \theta$

Q16 : A partir d'une condition de fermeture géométrique :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_e A_T'} &= \overrightarrow{A_e O_e} + \overrightarrow{O_e O_T'} + \overrightarrow{O_T' A_T'} = -\frac{b}{2} \vec{x}_e - \frac{a}{2} \vec{y}_e + (z_0 + z(t)) \vec{z}_e + \frac{b}{2} \vec{x}_T + \frac{a}{2} \vec{y}_T \\ &= -\frac{b}{2} \vec{x}_e - \frac{a}{2} \vec{y}_e + (z_0 + z(t)) \vec{z}_e + \frac{b}{2} (\cos \varphi \vec{x}_e - \sin \varphi \vec{z}_e) + \frac{a}{2} (\cos \theta \vec{y}_e + \sin \theta (\cos \varphi \vec{z}_e + \sin \varphi \vec{x}_e)) \end{aligned}$$

On peut linéariser au premier ordre en θ, φ :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_e A_T'} &\approx -\frac{b}{2} \vec{x}_e - \frac{a}{2} \vec{y}_e + (z_0 + z(t)) \vec{z}_e + \frac{b}{2} (\vec{x}_e - \varphi \vec{z}_e) + \frac{a}{2} (\vec{y}_e + \theta (\vec{z}_e + \varphi \vec{x}_e)) \\ &\approx -\frac{b}{2} \vec{x}_e - \frac{a}{2} \vec{y}_e + (z_0 + z(t)) \vec{z}_e + \frac{b}{2} (\vec{x}_e - \varphi \vec{z}_e) + \frac{a}{2} (\vec{y}_e + \theta (\vec{z}_e)) \\ &\approx (z_0 + z(t)) \vec{z}_e - \frac{b}{2} \varphi \vec{z}_e + \frac{a}{2} \theta \vec{z}_e \approx \left(z_0 + z(t) - \frac{b}{2} \varphi + \frac{a}{2} \theta \right) \vec{z}_e \end{aligned}$$

Ainsi : $\vec{R}_{plotA \rightarrow T} \approx -k \left(z(t) - \frac{b}{2} \varphi + \frac{a}{2} \theta \right) \vec{z}_e$

Q19 En utilisant les notations proposées, nous avons :

$$u(t) = u_m e^{j\omega t}$$

$$\dot{u}(t) = j\omega u_m e^{j\omega t}$$

$$\ddot{u}(t) = -\omega^2 u_m e^{j\omega t} \quad \text{avec } u(t) = z(t), \varphi(t) \text{ ou } \theta(t)$$

Ainsi le système d'équations se met sous la forme :

$$(-M\omega^2 + 4k) \underline{z}_m e^{j\omega t} = 0$$

$$(-B\omega^2 + kb^2) \underline{\varphi}_m e^{j\omega t} = 0$$

$$(-A\omega^2 + ka^2) \underline{\theta}_m e^{j\omega t} = 0$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} 4k & 0 & 0 \\ 0 & kb^2 & 0 \\ 0 & 0 & ka^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{z}_m \\ \underline{\varphi}_m \\ \underline{\theta}_m \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{z}_m \\ \underline{\varphi}_m \\ \underline{\theta}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{K}} = \begin{bmatrix} 4k & 0 & 0 \\ 0 & kb^2 & 0 \\ 0 & 0 & ka^2 \end{bmatrix} \text{ et } \overline{\overline{M}} = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}$$

Q20 : Le déterminant doit être nul donc $\det \begin{bmatrix} 4k - M\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & kb^2 - B\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & ka^2 - A\omega^2 \end{bmatrix} = 0$

soit encore : $(4k - M\omega^2)(kb^2 - B\omega^2)(ka^2 - A\omega^2) = 0$

On a donc :

$$\begin{cases} f_z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4k}{M}} \\ f_\phi = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kb^2}{B}} \\ f_\theta = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{ka^2}{A}} \end{cases}$$

Q21 : Application numérique : $f_\phi = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kb^2}{B}} = 29,15 \text{ Hz}$ Avec $k=1500 \text{ N/m}$, $b=0,22 \text{ m}$ et $B=2163615 \cdot 10^{-9} \text{ kg.m}^2$

Q22 : Le mode de pompage est étudié dans les trois modèles : il est estimé à 22,5 Hz en II.3, comme en II.4, alors que la méthode des éléments finis le donne à 21,7 Hz, ce qui est assez proche.

Les modes de roulis et de tangage sont estimés respectivement à 13,7 Hz et 29,15 Hz en II.4 alors que la méthode des éléments finis les estime respectivement à 8,8 Hz et 27,2 Hz.

Si on compare II.4 et la méthode des éléments finis, il vient par exemple :

Mode	II.4 (en Hz)	Éléments finis (en Hz)	Erreur relative
Pompage	22,5	21,7	3,6%
Roulis	13,7	8,8	36%
Tangage	29,15	27,2	6,7%

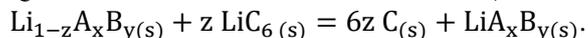
Q23 Les fréquences propres du tube (Pompage, Roulis et Tangage) sont en dessous de celles de la structure en étoile dont les fréquences propres commencent à 41,8 Hz.

Les autres fréquences propres du tube déterminées par éléments finis sont au-delà de la fréquence propre maximale de la structure en étoile estimée à 161 Hz.

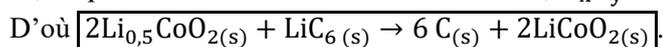
Les exigences du tableau 2 sont donc vérifiées.

Partie III – Comment alléger la batterie ?

Q24. En utilisant les deux demi-réactions, en multipliant la première par z afin d'éliminer les électrons, il vient :



Et, d'après l'information du bas du document, A_xB_y est CoO_2 , et $z = 0,5$. En multipliant tout par 2 :



Q25. On choisit les proportions stœchiométriques pour ne pas embarquer des constituants qui ne réagissent pas, et qui donc constitueraient une surmasse inutile.

D'après la réaction-bilan, qui correspond à 1 mole d'électrons échangés, pour n moles d'électrons échangés, il faut $6n$ moles de C, $2n$ moles de Li, $2n$ moles de CoO_2 . Ceci se voit aussi bien dans le membre de droite que dans celui de gauche.

La masse de l'accu est donc $m_{\text{accu}} = n(6M_C + 2M_{\text{Li}} + 2M_{\text{Co}} + 4M_{\text{O}})$.

Q26. D'après la question Q25, si pendant toute la décharge de l'accu, il passe n moles d'électrons dans les fils, donc une charge électrique nF , la masse de l'accu est m_{accu} .

La capacité massique est donc $q_{\text{max}} = \frac{nF}{m_{\text{accu}}} = \frac{F}{6M_C + 2M_{\text{Li}} + 2M_{\text{CoO}_2}}$.

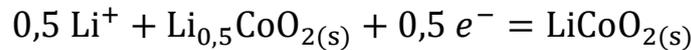
Numériquement, $q_{\text{max}} = 3,6 \cdot 10^5 \text{ C.kg}^{-1} = 1,0 \cdot 10^2 \text{ A.h.kg}^{-1}$. Compte tenu de la tension $E = 3,7 \text{ V}$ aux bornes de cet accu, cela représente une énergie massique $w_{\text{max}} = E \times q_{\text{max}} = 3,7 \cdot 10^2 \text{ W.h.kg}^{-1}$.

Q27. Sachant que la fém par étage est de 3,7 V, pour obtenir une fém de 11,1 V, il faut mettre **3 étages en série**.

Pour un étage de la batterie 3S du Bebop 2, la capacité massique est $q_{Bebop} = \frac{C}{m/3} = \frac{3 \times 2,700}{0,180} = 45 \text{ A. h. kg}^{-1}$. Attention au piège : les 3 étages étant en série, ils sont traversés par le même courant, donc par la même charge. Et la masse d'un étage est le tiers de la masse totale.

On voit que q fait moins de la moitié de q_{max} , mais dans la masse de l'accu réel, il y a aussi le polymère, les connecteurs, les fils électriques, l'enveloppe en plastique.

Q28. Si on **enlève le carbone** pour obtenir du Lithium pur, il est certain que la masse diminue, pour une même capacité. Et si on remplace $\text{Li}_{0,5}\text{CoO}_2$ par $\text{LiSi}_{0,22}$, les demi-réactions deviennent :



D'où $\text{LiSi}_{0,22}(\text{s}) + 2 \text{ Li}_{0,5}\text{CoO}_2(\text{s}) = 0,22 \text{ Si}(\text{s}) + 2 \text{ LiCoO}_2(\text{s})$ et $q_{max} = \frac{F}{0,22M_{Si} + 2M_{Li} + 2M_{CoO_2}}$

Remplacer $6M_C = 12 \text{ g. mol}^{-1}$ par $0,22M_{Si} = 6,2 \text{ g. mol}^{-1}$ permet un gain de masse, à capacité égale.

Partie IV - Quel rapport entre masse et autonomie ?

Q29. Le phénomène physique associé à une **résistance R est l'effet Joule**, c'est-à-dire la conversion d'énergie électrique en transfert thermique.

Celui associé à **l'inductance L est l'auto-induction**, c'est-à-dire la création d'une force électromotrice induite du fait des variations temporelles du champ magnétique créé par la bobine sur elle-même.

Celui associé à la **capacité C est l'influence électrique, c'est-à-dire l'interaction entre les charges électriques** situées dans les différentes spires de la bobine, comme à l'intérieur d'un condensateur.

Q30. Le modèle (b) de la figure 22 est un **circuit du premier ordre**. Et le tracé de droite de la figure 23 montre la tension aux bornes de la résistance R_C , qui est proportionnelle au courant $i(t)$ dans la bobine. L'évolution du courant est bien celle de la réponse à un échelon de tension d'un circuit d'ordre 1, de type R, L , avec une asymptote horizontale, traduisant une loi en $(1 - \exp(-\frac{t}{\tau}))$.

Or, pour une telle loi, la tangente au démarrage coupe l'asymptote horizontale à $t = \tau$.

On lit sur le graphe $\tau = 0,065 - 0,057$, d'où $\tau = \frac{L}{R+R_C+R_g} = 8 \mu\text{s}$. On en déduit **$L = 8,4 \text{ mH}$** .

Q31. Le modèle (a) de la figure 22 correspond à **$|Z| = R$** .

Il n'est valide que tant que **$|Z|$ est constant, c'est-à-dire que pour $f < 100 \text{ Hz}$** .

Le modèle (b), qui correspond à **$|Z| = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$** , est valide en basse fréquence, tant que $L\omega \ll R$ puisqu'alors l'impédance est assimilable à R . En plus haute fréquence, quand $L\omega \gg R$, **$|Z| \approx L\omega$** , ce qui donne en échelle log-log une droite de pente +1.

Ce modèle (b) est donc valide, **jusqu'à environ 6.10^4 Hz** .

Q32. Le modèle c) de la figure 22 donne $\frac{1}{Z} = jC\omega + \frac{1}{R+jL\omega} = \frac{1-LC\omega^2+jRC\omega}{R+jL\omega}$, d'où **$Z = \frac{R+jL\omega}{1-LC\omega^2+jRC\omega}$** .

Q33. Comme on l'a vu à la Q31, au-delà d'une centaine de Hertz, on peut négliger R devant $jL\omega$. C'est le cas à la fréquence de résonance (pic de la fig 24), qui vaut environ $f_0 = 1,5.10^5 \text{ Hz}$, car 1 décade fait 14mm et f_0 est à 2,5 mm au-dessus de 10^5 Hz , et $10^{(\frac{2,5}{14})} = 1,5$.

On a donc, à cette fréquence, **$Z \approx \frac{jL\omega}{1-LC\omega^2+jRC\omega} = \frac{\frac{L}{RC}}{\frac{1}{jRC\omega} + \frac{jL\omega}{R} + 1} = \frac{\frac{L}{RC}}{\frac{j}{R}(L\omega - \frac{1}{C\omega}) + 1}$** , donc **$|Z| \approx \frac{\frac{L}{RC}}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2}(L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$** . Or, cette

fonction de ω passe par un maximum quand le dénominateur est minimum, c'est-à-dire quand **$(L\omega - \frac{1}{C\omega}) = 0$** .

Ainsi, $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, d'où **$C = \frac{1}{4\pi^2 L f_0^2}$** . Numériquement, **$C \approx 0,13 \text{ nF}$** .

Q34. Les ondes étant électromagnétiques, et le milieu étant de l'air assimilable au vide, la longueur d'onde pour une fréquence de 100 kHz est $\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{10^5} = 3 \text{ km}$. On peut bien dire que $r_0 \ll \lambda$, donc se placer effectivement dans l'ARQS.

Q35. On calcule

$$M = \frac{N_2}{i_1} \iint_{S_2} \frac{\mu_0 N_1 i_1 S_1}{4\pi r_0^3} (2 \cos \theta_0 \vec{u}_r + \sin \theta_0 \vec{u}_\theta) \cdot dS_2 \vec{u}_z$$

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_1}{4\pi r_0^3} (2 \cos \theta_0 \vec{u}_r + \sin \theta_0 \vec{u}_\theta) \cdot (\cos \theta_0 \vec{u}_r - \sin \theta_0 \vec{u}_\theta) \iint_{S_2} dS_2$$

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_2 S_1}{4\pi r_0^3} (2 \cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0)$$

Q36. Aux faibles distances, on ne peut plus considérer que le champ créé par la bobine 1 est uniforme dans toute la surface S_2 de chacune des spires de la bobine 2, ce qui explique le désaccord aux faibles distances entre l'expérience et le modèle analytique.

Mais vu que r_0 est compris entre environ 1 m et 10 m, la figure 26 montre que le modèle analytique convient.

Q37. Compte tenu des « points homologues » (cf chapitre sur le transformateur) repérés par des points noirs sur la figure 27b), et compte tenu du fait que l'inductance mutuelle calculée à la Q35 sera a priori positive dans un contexte de recharge où θ_0 sera proche de 0,

l'équation de la maille de gauche est : $\underline{e} = \left(R_1 + jL_1\omega + \frac{1}{jC_1\omega} \right) \underline{i}_1 - jM\omega \underline{i}_2$.

Celle de la maille de droite est $+jM\omega \underline{i}_1 = \left(R_2 + R_c + jL_2\omega + \frac{1}{jC_2\omega} \right) \underline{i}_2$.

On peut remarquer que ces deux équations conduisent bien à l'équation (8) de l'énoncé.

Q38. Pour $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$, l'équation (8) devient $\underline{i}_2 = \frac{Mj\omega_0 \underline{e}}{M^2 \omega_0^2 + R_1(R_2 + R_c)}$.

Le courant qui circule dans R_c a pour valeur efficace $I_{2 \text{ eff}} = \frac{|\underline{i}_2|}{\sqrt{2}} = \frac{M\omega_0 |\underline{e}|}{\sqrt{2} (M^2 \omega_0^2 + R_1(R_2 + R_c))} = \frac{M\omega_0 E_{\text{eff}}}{(M^2 \omega_0^2 + R_1(R_2 + R_c))}$

La puissance moyenne reçue par la charge R_c est donc $P = \frac{R_c (M\omega_0 E_{\text{eff}})^2}{(M^2 \omega_0^2 + R_1(R_2 + R_c))^2}$.

Q39. La puissance maximale est, pour une distance de $1\text{m} : P_{\text{max}1} = 1,2 \text{ kW}$, pour une distance de $3\text{m} : P_{\text{max}2} = 25 \text{ W}$, pour une distance de $10\text{m} : P_{\text{max}3} = 2,5 \text{ mW}$.

On a vu à la question 7 que la puissance consommée en vol stationnaire était de l'ordre de 50 W. Donc la transmission de puissance par couplage inductif résonnant ne fonctionnerait que pour un éloignement de moins de 3 mètres.

Le dispositif n'est donc pas exploitable pour un drone.