# Physique

## Fiche – Analyse de Fourier

L. Torterotot

## 1 Fonctions périodiques

### 1.1 Développement en série de Fourier

**Théorème de Fourier** Soit un signal physique de période $T = 1/\nu$. Son caractère physique implique qu'il soit continu par morceaux et de carré intégrable. Il peut alors être décomposé en la somme :
- d'un terme constant égal à sa valeur moyenne ;
- d'une composante sinusoïdale de fréquence $\nu$, le *fondamental* ;
- de composantes sinusoïdales de fréquences multiples de $\nu$, les *harmoniques*.

✎ *La série de Fourier ainsi obtenue converge en norme $L^2$ vers le signal considéré car ce dernier est de carré intégrable.*

Ainsi, un signal $s$ vérifiant ces propriétés admet un développement en *série de Fourier*, tel que

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi\, n\nu\, t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi\, n\nu\, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega t)$$
$$= \chi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_n \cos(n\omega t + \varphi_n)\,,$$

avec $a_n$, $b_n$ ou $\chi_n$ les *coefficients de Fourier* de $s$, définis tels que

$$a_0 = \chi_0 = \langle s \rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\,\mathrm{d}t\ , \quad b_0 = 0\,,$$
$$a_{n\geqslant 1} = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t\ , \quad b_{n\geqslant 1} = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t\ ,$$
$$\chi_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\,, \quad \cos\varphi_n = \frac{a_n}{\chi_n}\,, \quad \sin\varphi_n = -\frac{b_n}{\chi_n}\,.$$

Utiliser $a_n$ et $b_n$ ou $\chi_n$ et $\varphi_n$ est équivalent, mais l'une ou l'autre de ces décompositions permet d'obtenir plus facilement certains résultats.

### 1.2 Spectre, représentation spectrale

Avec la décomposition utilisant $a_n$ et $b_n$,
- $\{\, a_0, \dots, a_n, b_n, \dots \}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est le *spectre de Fourier* de $s$, ou encore sa *représentation spectrale* ;
- $\{\, a_n \,\}_{n\in\mathbb{N}}$ est le *spectre en série cosinus* et correspond à la *partie paire* de $s$ ;
- $\{\, b_n \,\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est le *spectre en série sinus* et correspond à la *partie impaire* de $s$.

Avec la décomposition utilisant $\chi_n$,
- $\{\, \chi_0, \dots, \chi_n, \dots \}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une autre représentation spectrale qu'avec $a_n$ et $b_n$ ;
- $\{\, \chi_n \,\}_{n\in\mathbb{N}}$ est le *spectre en amplitude* de $s$ ;
- $\{\, \varphi_n \,\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est le *spectre en phase* de $s$ ;
- $\chi_0$ est la valeur moyenne de $s$ ;
- $\chi_1$ est l'amplitude du fondamental (ou premier harmonique) ;
- $\chi_n$ est l'amplitude de l'harmonique de rang $n$.

## 1.3 Série complexe de Fourier

Il est possible de décomposer un signal à valeurs complexes $\underline{s}$ (ou un signal réel $s$) selon

$$\underline{s}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underline{c}_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}\,, \quad \underline{c}_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \underline{s}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Cette écriture, plus simple, donne la représentation spectrale complexe $\{\,\underline{c}_n\,\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Si $\underline{s}$ est à valeur réelles ($\underline{s} = s$), alors

$$\underline{c}_0 = \chi_0\,, \quad \chi_n = 2|\underline{c}_n|\,, \quad \underline{c}_n = \frac{1}{2}\chi_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_n} = \frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2}\,, \quad \underline{c}_{-n} = \underline{c}_n^*\,.$$

## 1.4 Parseval, puissance moyenne

**Égalité de Parseval** Soit $s$ un signal physique de période $T$. Son caractère physique implique qu'il soit continu par morceaux et de carré intégrable. Alors, l'énergie du signal $s$ ne dépend pas de la représentation choisie, fréquentielle ou temporelle,

$$E = \int |s(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int |\mathcal{S}(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu \Rightarrow \boxed{\langle P\rangle = \frac{1}{T}\int_T |s(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum |\underline{c}_n|^2}$$

avec $\underline{c}_n$ les coefficients de Fourier de $s$. La puissance moyenne peut donc s'obtenir en sommant les contributions des différents harmoniques.

Ainsi, la valeur efficace d'un signal s'obtient par la somme quadratique des valeurs efficaces de chaque composante. Par exemple, pour un courant périodique non sinusoïdal,

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\langle i^2\rangle} = \sqrt{\langle i\rangle^2 + I_{1,\text{eff}}^2 + I_{2,\text{eff}}^2 + I_{3,\text{eff}}^2 + \dots}\,.$$

✎ *Cette formule peut être vue comme une généralisation du théorème de Pythagore pour les séries dans les espaces de Hilbert.*

En effet, la puissance active dissipée dans une résistance $R$ est

$$\begin{aligned} P = RI_{\text{eff}}^2 = \langle p(t)\rangle = R\langle i^2\rangle &= R\left\langle \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \chi_n \cos(n\omega t + \varphi_n)\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \chi_k \cos(k\omega t + \varphi_k)\right)\right\rangle \\ &= R\left\langle \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \chi_n \cos(n\omega t + \varphi_n)\chi_k \cos(k\omega t + \varphi_k)\right\rangle = R\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \chi_n\chi_k \left\langle \cos(n\omega t + \varphi_n)\cos(k\omega t + \varphi_k)\right\rangle \end{aligned}$$

en posant $\varphi_0 = 0$. Or, seul un produit de deux cosinus ou de deux sinus de même fréquence donne une moyenne non nulle, c'est-à-dire

$$\langle \cos(n\omega t + \varphi_n)\cos(k\omega t + \varphi_k)\rangle = \frac{1}{2}\delta_{nk}\,.$$

✎ *La relation entre valeur efficace $S_{\text{eff}}$ et amplitude $S_{\text{ampl}}$ pour une sinusoïde est*

$$S_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}}S_{\text{ampl}} \qquad \textit{car} \qquad \langle\cos^2\rangle = \langle\sin^2\rangle = \frac{1}{2}\,.$$

Ainsi,

$$P = R\sum_n \frac{1}{2}\chi_n^2 = R\sum_n \left(\frac{\chi_n}{\sqrt{2}}\right)^2 = R\sum_n I_{n,\text{eff}}^2 = R\left(\langle i\rangle^2 + I_{1,\text{eff}}^2 + I_{2,\text{eff}}^2 + I_{3,\text{eff}}^2 + \dots\right)\,.$$

Ce résultat peut aussi s'écrire

$$S_{\text{eff}}^2 = \langle s^2\rangle = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1}(a_n^2 + b_n^2) = \chi_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1}\chi_n^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|\underline{c}_n|^2\,.$$

Le taux d'harmonique $n$, $\tau_n$, et le taux de distorsion harmonique $\delta$ (ou TdH) sont définis selon

$$\tau_n = \frac{\chi_n}{\chi_1}\,, \quad \text{TdH} = \delta = \sqrt{\sum_{n\geqslant 2}\tau_n^2} = \frac{\sqrt{\sum_{n\geqslant 2}\chi_n^2}}{\chi_1} = \frac{\sqrt{2s_{\text{eff}}^2 - \chi_1^2}}{\chi_1} = \frac{s_{\text{harm.eff}}}{s_{\text{fond.eff}}} = \frac{\sqrt{s_{\text{eff}}^2 - s_{\text{fond.eff}}^2}}{s_{\text{fond.eff}}}\,.$$

## 1.5 Propriétés

- Si $s$ est pair, alors $b_n = 0$, c'est-à-dire $\varphi_n = 0$ ou encore $\underline{c}_n \in \mathbb{R}$.
- Si $s$ est impair, alors $a_n = 0$, c'est-à-dire $\varphi_n = \frac{\pi}{2}$ ou encore $\underline{c}_n \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ (imaginaire pur).
- Si $s(t+T/2) - \langle s \rangle = -(s(t) - \langle s \rangle)$, c'est-à-dire que le signal peut être décrit par un motif de durée $T/2$ à retourner par rapport à l'axe $y = \langle s \rangle$, alors $a_{2p} = b_{2p} = 0$ pour $p > 0$, c'est-à-dire que les harmoniques paires sont nulles hormis éventuellement l'harmonique 0 (composante continue).
- Presque partout (hors points de discontinuité),

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sum \chi_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos(n\omega t + \varphi_n)) \,, \quad \int s \,\mathrm{d}t = \sum \chi_n \int \cos(n\omega t + \varphi_n) \,\mathrm{d}t + \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \,.$$

## 1.6 Interprétation géométrique

Les harmoniques d'une fonction $T$-périodique sont ses composantes dans la base des cosinus, sinus ou exponentielles complexes, selon la décomposition choisie.

Les fonctions $t \mapsto 2\cos(n\omega t)$, $t \mapsto 2\sin(n\omega t)$ ou encore $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}$ jouent alors le rôle des « vecteurs de base » et les coefficients de Fourier sont les « coordonnées » du « vecteur » correspondant à la fonction $s$, que l'on obtient à l'aide du *produit scalaire*, par exemple

$$b_n = \langle s | 2\sin(n\omega t) \rangle = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \sin(n\omega t) \,\mathrm{d}t \;, \quad \underline{c}_n = \left\langle s \middle| \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t} \,\mathrm{d}t \;.$$

L'égalité de Parseval s'assimile alors au théorème de Pythagore, la valeur efficace du signal correspondant à l'hypoténuse et les valeurs efficaces de chaque composante aux côtés du « triangle ».

## 1.7 Exemples

Pour les signaux créneau et triangle représentés figure 1, d'amplitude $E$ et de pulsation $\omega = 2\pi\nu$,

$$s_{\text{créneau}} = \sum_p \frac{4E}{(2p+1)\pi} \sin((2p+1)\omega t) \Rightarrow a_n = 0 \,, \quad b_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair,} \\ \dfrac{4E}{n\pi} \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

$$s_{\text{triangle}} = \sum_p (-1)^p \frac{8E}{(2p+1)^2\pi^2} \sin((2p+1)\omega t) \Rightarrow a_n = 0 \,, \quad b_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair,} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \dfrac{8E}{n^2\pi^2} \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

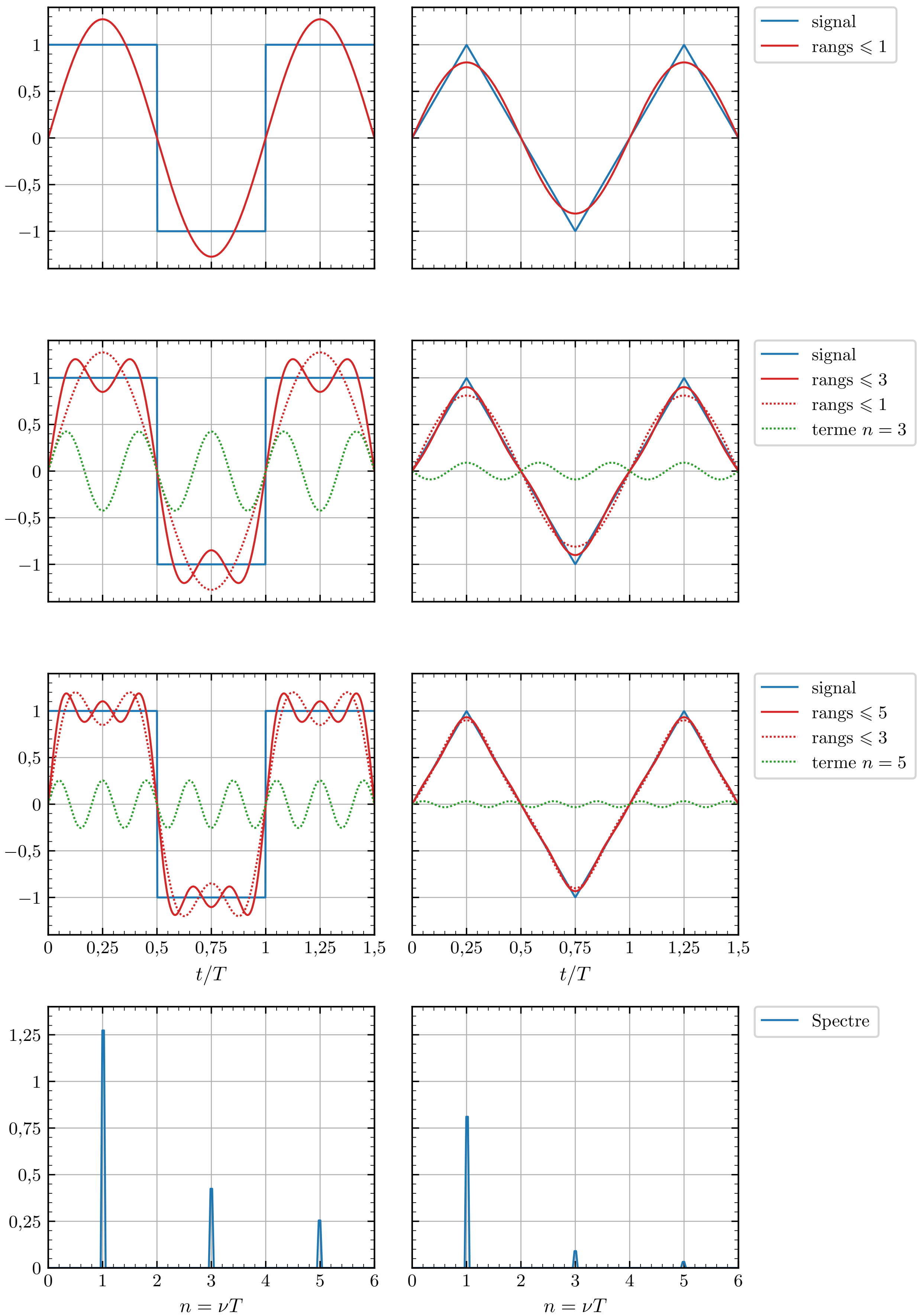


**Figure 1** – *Signal de base (créneau à gauche, triangle à droite) d'amplitude $E = 1$, premiers harmoniques et leurs sommes. En bas, spectre en amplitude du signal. Dans ces exemples, les harmoniques pairs sont nuls.*