I Cours d'électricité

1) impédances équivalentes
   a) Démontrer l'expression de l'impédance équivalente à m dipôles d'impédance Z_i (i de 1 à m), associés en série.
   b) Démontrer l'expression de l'impédance équivalente à n dipôles d'impédance Z_j (j de 1 à n), associés en dérivation.
   c) En déduire l'impédance équivalente à p dipôles identiques d'impédance Z et associés en dérivation.

2) Quel est l'argument de l'impédance complexe d'un dipôle pour lequel tension aux bornes et intensité du courant sont en phase ?

II Flash d'appareil photo

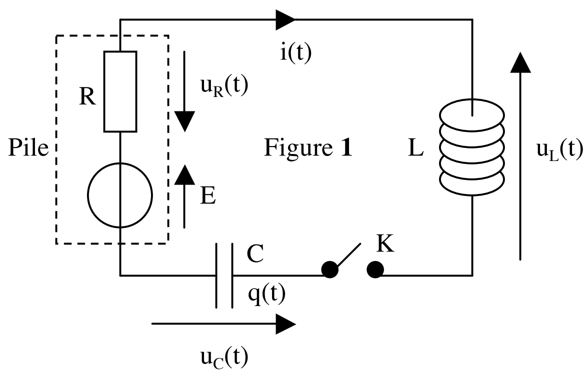
On envisage un moyen simplifié d'obtenir, à partir d'une source de tension constante E, sans autre apport d'énergie extérieure :

- une tension alternative sinusoïdale ;
- une tension constante E' très supérieure à E ($E' \approx 200E$).

Le problème est considéré dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS).
Cet exercice porte sur l'étude d'un montage électrique capable d'alimenter le flash d'un appareil photographique, à l'aide d'une petite pile du commerce, de force électromotrice (f.e.m.) continue $E = 1{,}5\,V$.

A - Obtention d'un courant alternatif sinusoïdal

Une association série « L, C » constituée d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L, est alimentée par une pile de f.e.m. E constante (source indépendante de tension) et de résistance interne R (voir figure 1) A l'instant initial t = 0, le condensateur de capacité C est <u>déchargé</u> $q(t=0)=0$ et l'interrupteur K est actionné afin de fermer le circuit.



1) Donner, sans calcul, les valeurs, à l'instant initial, des tensions $u_R(t=0)$ (aux bornes du résistor) et $u_C(t=0)$ (aux bornes du condensateur).
2) En déduire la valeur de $u_L(t=0)$.
3) Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_L(t)$ aux bornes de la bobine. Cette équation se met sous la forme :

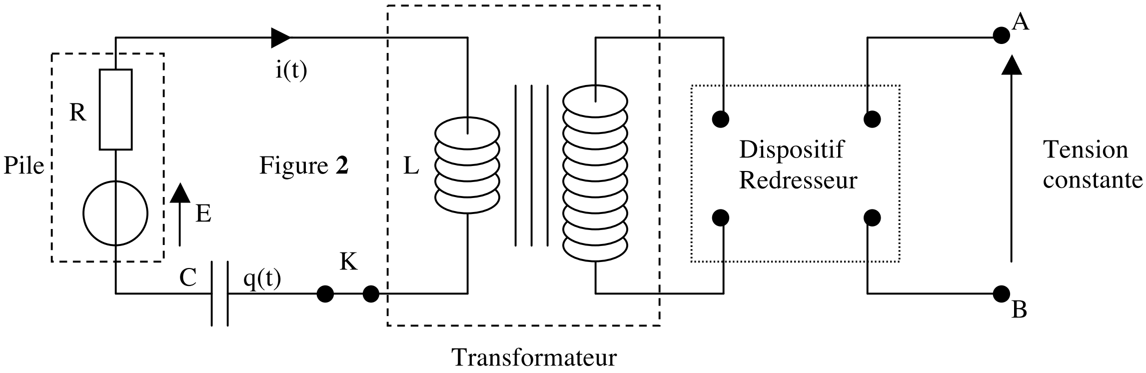
$$\text{(E)} \qquad \frac{d^2u_L}{dt^2} + a\frac{du_L}{dt} + bu_L(t) = 0$$

où a et b sont des constantes.

4) Exprimer les constantes a et b en fonction des données de l'énoncé.
5) Premier cas : la résistance est négligeable (absence du terme d'amortissement)
   a) Résoudre l'équation (E), sachant que $R = 0$, et écrire l'expression de la fonction $u_L(t)$. Quelle est la nature de cette tension ?
   b) Exprimer, en fonction des données de l'énoncé, la pulsation propre du circuit ω_o.
   c) Dessiner l'allure de la courbe représentative de la fonction $u_L(t)$.
6) Second cas : la résistance n'est plus négligeable, et les composants du circuit sont tels que la relation $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ est vérifiée.
   a) Résoudre l'équation (E) et écrire la nouvelle expression de la fonction $u_L(t)$.
   b) Exprimer, en fonction des données de l'énoncé, la pseudo-pulsation Ω de la fonction $u_L(t)$.
   c) Dessiner l'allure de la courbe représentative de la fonction $u_L(t)$.
7) Conclusion : pour quelle(s) valeur(s) de R la tension $u_L(t)$ sera-t-elle alternative sinusoïdale ?

B - Alimentation du flash

Solénoïde à faible nombre de spires, la bobine précédente est en réalité le « primaire » d'un transformateur, dont le « secondaire » est assuré par un second solénoïde, à nombre de spires beaucoup plus important. Ces deux enroulements sont liés magnétiquement par un noyau en fer doux. Ce dispositif permet de fournir, à partir de la tension alternative supposée sinusoïdale $u_L(t)$, de pulsation ω et d'amplitude U_{Lm} aux bornes du primaire, une tension alternative sinusoïdale $u'(t)$, de pulsation ω et d'amplitude $U'_m = kU_{Lm}$ aux bornes du secondaire, avec k > 1 (k $\approx$ 200 dans le cadre d'un flash d'appareil photographique). La tension variable ainsi produite aux bornes du « secondaire » est ensuite « redressée » afin d'obtenir aux bornes du dipôle AB une tension constante (figure 2).



Le dipôle AB, équivalent à un générateur de Thévenin, de f.e.m. E' constante (avec $E' = 200E$) et de résistance R', permet d'alimenter le flash (figure 3). Lorsque l'interrupteur K' est en position (1), le dispositif assure la charge d'un condensateur de capacité C'. Dès que la charge du condensateur a pratiquement atteint sa valeur maximale q'_o, le flash est prêt à fonctionner. A l'instant initial $t = 0$, la mise en place de l'interrupteur K' en position (2) permet la décharge du condensateur dans le résistor symbolisant le flash de résistance R_f, ce qui provoque l'émission d'un éclair lumineux.

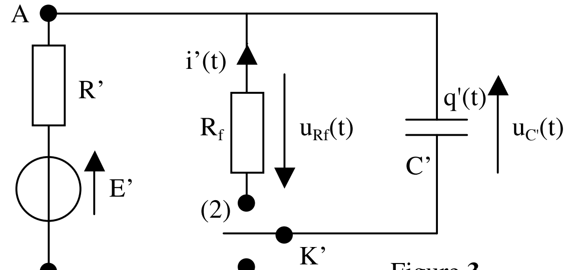


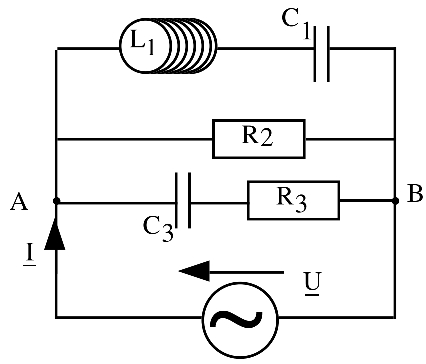
Figure **3**

1) Exprimer, en fonction de C' et E', la charge maximale q'_o du condensateur.
2) Soit $i'(t)$ l'intensité du courant qui circule dans le résistor de résistance R_f (orientation donnée sur la figure 3). Déterminer, pour $t \geq 0$, l'expression de la fonction $i'(t)$.
3) Dessiner l'allure de la courbe représentative de la fonction $i'(t)$.
4) Exprimer, en fonction de R_f et C', l'ordre de grandeur Δt du temps nécessaire à la décharge du condensateur.
5) *Application numérique* : $R_f = 10\ \Omega$; $C' = 10^{-4} F$. Proposer une valeur numérique de Δt.

III Grandeur efficaces et déphasage

Soit le montage ci-contre constitué de 3 dipôles placés en dérivation.
L'ensemble est alimenté par un signal sinusoïdal de fréquence $f = 120\,000\,Hz$ et dont la tension efficace est $U = 12V$; on notera $u(t) = U\sqrt{2}\cos\omega t$ la tension délivrée par le générateur. On notera ainsi les différentes intensités du courant :

$i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ dans la branche contenant le générateur.
$i_1(t) = I_1\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_1)$ dans la branche où se trouvent L_1 et C_1.
$i_2(t) = I_2\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_2)$ dans le résistor R_2.
$i_3(t) = I_3\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_3)$ dans la branche où se trouvent R_3 et C_3.



1.a) Exprimer littéralement les impédances complexes Z_1, Z_2, Z_3 des trois branches du dipôle AB.
b) Etablir sous la forme a+jb, les expressions de chacune des admittances complexes Y_1, Y_2, Y_3…où a et b sont des réels. Calculer numériquement les coefficients a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3.
c) en déduire l'admittance Y du dipôle AB sous la forme $c + jd$ (on ne cherchera à présenter sous forme très simplifiée c et d mais on indiquera leurs valeurs numériques).
2) Calculer numériquement les valeurs efficaces I, I_1, I_2, I_3 des intensités dans toutes les branches .
3) Calculer numériquement en radian les avances de phase φ, φ_1, φ_2, φ_3 de chacune des 4 intensités par rapport à la tension $u(t)$.

I Cours d'électricité

1) impédances équivalentes

a) Démontrer l'expression de l'impédance équivalente à m dipôles d'impédance Z_i (i de 1 à m), associés en série

Soient n dipôles associés en série, la tension aux bornes de l'ensemble est $u = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$.

On a pour chaque dipôle d'indice k la relation : $Z_k = \dfrac{\underline{U}_k}{\underline{I}_k}$

La relation $u = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$ est associée à $\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 + ... + \underline{u}_n \Rightarrow \underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + ... + \underline{U}_n = Z_{eq}\underline{I} = \sum_{k=1}^{n} Z_k \underline{I}$

on en déduit : $\boxed{Z_{eq} = \sum_{k=1}^{n} Z_k}$ avec Z_{eq} impédance équivalente à l'association série .

b) Démontrer l'expression de l'impédance équivalente à n dipôles d'impédance Z_j (j de 1 à n), associés en dérivation.

Soient n dipôles associés en dérivation, l'intensité traversant l'ensemble du dipôle est $i = i_1 + i_2 + i_3 + ... + i_n$.

La tension aux bornes de l'ensemble est u .

On a pour chaque dipôle k la relation : $Z_k = \dfrac{\underline{U}_k}{\underline{I}_k} \Rightarrow \underline{I}_k = \dfrac{\underline{U}_k}{Z_k}$

La relation $i = i_1 + i_2 + i_3 + ... + i_n$ est associée à $\underline{i} = \underline{i}_1 + \underline{i}_2 + ... + \underline{i}_n \Rightarrow \underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + ... + \underline{I}_n = \dfrac{\underline{U}}{Z_{eq}} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\underline{U}}{Z_k}$

on en déduit : $\boxed{\dfrac{1}{Z_{eq}} = \sum_{k=1}^{p} \dfrac{1}{Z_k}}$.

c) En déduire l'impédance équivalente à p dipôles identiques d'impédance Z et associés en dérivation.

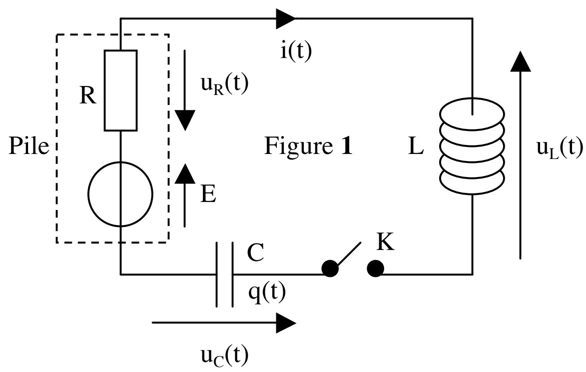
$$\frac{1}{Z_{eq}} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{Z_k} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{Z} = \frac{p}{Z} \rightarrow \boxed{Z_{eq} = \frac{Z}{p}}$$

2) déphasage entre tension aux bornes et intensité du courant dans un dipôle

$Z = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}$ donc si u(t) et i(t) sont en phase Z est un réel positif d'argument nul.

II Flash d'appareil photo

A) **Obtention d'un courant alternatif**



1) Continuité de $u_C(t)$ avec le condensateur initialement déchargé $\Rightarrow u_C(t=0) = 0$.

Continuité de i(t) avec K initialement ouvert $\Rightarrow i(t=0) = 0 \Rightarrow u_R(t=0) = 0$.

2) Loi des mailles pour $t \geq 0$: $u_C + u_L + u_R = E \Rightarrow u_L(t=0) = E$

3) $u_C + u_L + u_R = E \Rightarrow \ddot{u}_C + \ddot{u}_L + \ddot{u}_R = 0$ avec $u_L = L\dfrac{di}{dt}$,

$u_R = Ri$, $u_C = \dfrac{q}{C}$, $i = \dfrac{dq}{dt}$

on a donc $\dot{u}_R = R\dfrac{di}{dt} = R\dfrac{u_L}{L} \Rightarrow \ddot{u}_R = \dfrac{R}{L}\dot{u}_L$ de même

$\dot{u}_C = \dfrac{i}{C} \Rightarrow \ddot{u}_C = \dfrac{1}{C}\dfrac{di}{dt} = \dfrac{1}{LC}u_L \Rightarrow \boxed{\ddot{u}_L + \dfrac{R}{L}\dot{u}_L + \dfrac{1}{LC}u_L = 0}$

4) on a donc $\boxed{a = \dfrac{R}{L}}$ et $\boxed{b = \dfrac{1}{LC}}$

5) R=0 on a donc a=0 $\Rightarrow \ddot{u}_L + bu_L = 0$

a) $u_L(t) = A\cos\sqrt{b}t + B\sin\sqrt{b}t \Rightarrow \dot{u}_L(t) = -A\sqrt{b}\sin\sqrt{b}t + B\sqrt{b}\cos\sqrt{b}t$

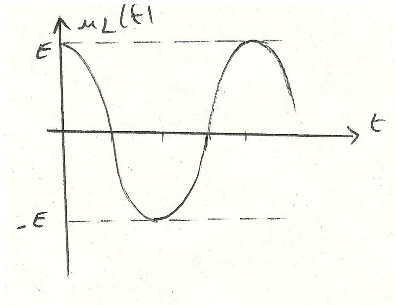
avec $\boxed{u_L(0)=E}$ et $\dot{u}_L(0) = -\dot{u}_R(0) - \dot{u}_C(0) = -\frac{R}{L}u_L(0) - \frac{1}{C}i(0) = -\frac{R}{L}E \Rightarrow \boxed{\dot{u}_L(0) = -\frac{R}{L}E}$

$E = A$ et $-\frac{R}{L}E = B\sqrt{b} \Rightarrow A = E$ et $B = -\frac{R}{L\sqrt{b}}E = -R\sqrt{\frac{C}{L}}\,E \Rightarrow \boxed{u_L(t) = E\cos\frac{t}{\sqrt{LC}} - RE\sqrt{\frac{C}{L}}\,\sin\frac{t}{\sqrt{LC}}}$

mais en fait R est négligeable, on peut donc écrire $\boxed{u_L(t) = E\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}}$

b) $\omega_o^2 = b = \frac{1}{LC} \Rightarrow \boxed{\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$

c) voir courbe ci-contre.



6) R non négligeable.

a) b) équation caractéristique : $p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0$ alors $\Delta = \frac{1}{L^2}(R^2 - 4\frac{L}{C}) < 0$

d'où un régime pseudopériodique.

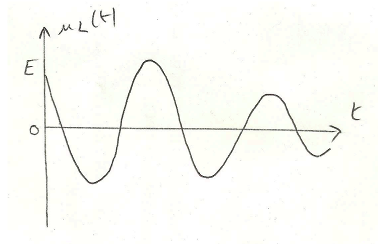
$$\Delta' = \frac{1}{L^2}(\frac{R^2}{4} - \frac{L}{C}) = -\Omega^2 \Rightarrow \Omega = \sqrt{-\Delta'} = \sqrt{\frac{1}{L^2}(\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4})} \Rightarrow \boxed{\Omega = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}}}$$

$$u_L(t) = e^{-Rt/2L}(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t) \Rightarrow \dot{u}_L = e^{-Rt/2L}[\,(B\Omega - \frac{RA}{2L})\cos\Omega t - (A\Omega + \frac{RB}{2L})\sin\Omega t\,]$$

$$u_L(0) = E \quad \text{et} \quad \dot{u}_L(0) = -\frac{R}{L}E \Rightarrow A = E \quad \text{et} \quad -\frac{R}{L}E = B\Omega - \frac{RA}{2L} \Rightarrow B = -\frac{RE}{2L\Omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_L(t) = E.e^{-Rt/2L}[\,\cos\Omega t - \frac{R}{2L\Omega}\sin\Omega t\,]}$$

c) voir courbe ci-contre.



7) $u_L(t)$ sera alternative sinusoïdale pour R=0.

B) Alimentation du flash

1) $q'_o = C'E'$

2) $\frac{q'}{C'} + R_f\dot{q}' = 0 \Rightarrow q'(t) = q'_o e^{-t/\tau}$ avec $\tau = R_f C$ $\quad i' = \frac{dq'}{dt} \Rightarrow$

$\boxed{i'(t) = -\frac{q'_o}{R_f C}e^{-t/\tau}}$

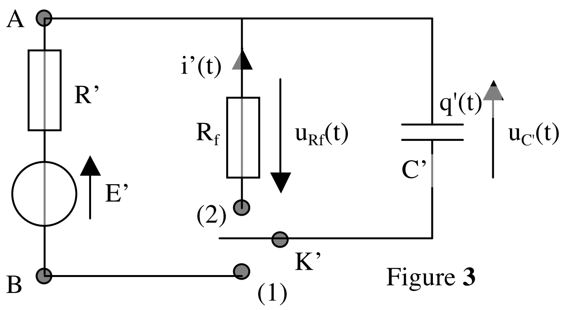
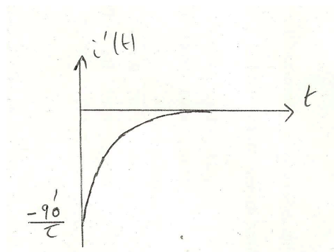


Figure **3**

3) courbe de i'(t).

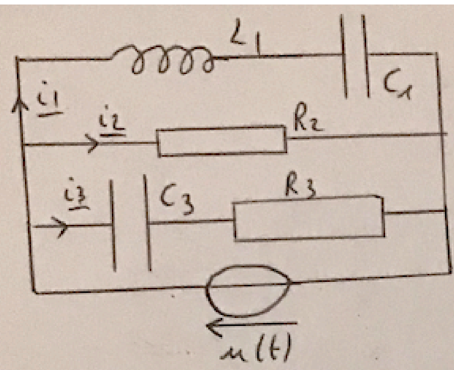


4) $\Delta t = 5\tau = 5R_f C$

5) $\tau = 1ms \Rightarrow \Delta t = 5ms$

III Grandeur efficaces et déphasage

1) a)



$Z_1 = j\left(L_1\omega - \frac{1}{C_1\omega}\right)$

$Z_2 = R$

$Z_3 = R_3 + \frac{1}{jC_3\omega} = \frac{1 + jR_3C_3\omega}{jC_3\omega}$

b) $Y_1 = \frac{1}{j\left(L_1\omega - \frac{1}{C_1\omega}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{C_1\omega} - L_1\omega\right)}j \Rightarrow Y_1 = -0{,}879j$

$Y_2 = \frac{1}{R_2} \Rightarrow Y_2 = 2S$

$Y_3 = \frac{jC_3\omega}{1 + jR_3C_3\omega} = \frac{R_3C_3^2\omega^2 + jC_3\omega}{1 + R_3^2C_3^2\omega^2} = 1{,}33 + 2{,}21j$

c) $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 \Rightarrow \boxed{Y = 3{,}33 + j1{,}33}$

2) $\underline{U} = Z_1\underline{I_1} = Z_2\underline{I_2} = Z_3\underline{I_3} \Rightarrow \underline{I_1} = Y_1\underline{U}$; $\underline{I_2} = Y_2\underline{U}$; $\underline{I_3} = Y_3\underline{U}$; $\underline{I} = Y\underline{U}$

$I_1 = |\underline{I_1}| = |Y_1||\underline{U}| \Rightarrow I_1 = 14{,}9\,A$

$I_2 = |\underline{I_2}| = |Y_2||\underline{U}| \Rightarrow I_2 = 34\,A$

$I_3 = |\underline{I_3}| = |Y_3||\underline{U}| \Rightarrow I_3 = \sqrt{1{,}33^2 + 2{,}21^2} \times 17 \Rightarrow I_3 = 43{,}8\,A$

$I = |\underline{I}| = |Y||\underline{U}| \Rightarrow I = \sqrt{3{,}33^2 + 1{,}33^2} \times 17 \Rightarrow I = 61\,A$

3) $\varphi_1 = \arg(\underline{I_1}) = \arg(Y_1\underline{U}) = \arg(Y_1) = \boxed{-\frac{\pi}{2} = \varphi_1}$

$\varphi_2 = \arg(Y_2) = 0$

$\varphi_3 = \arg Y_3 = \arctan\frac{2{,}21}{1{,}33} \Rightarrow \boxed{\varphi_3 = 1{,}03\,rd}$ $58{,}9°$

$\varphi = \arg(\underline{I}) = \arg(Y) = \arctan\frac{1{,}33}{3{,}33} \Rightarrow \boxed{\varphi = 0{,}38\,rd}$ $21{,}8°$

$$\boxed{\begin{array}{l} i_1(t) = 14{,}9\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) ; \ i_3(t) = 43{,}8\cos(\omega t + 1{,}03). \\ i_2(t) = 34\cos\omega t \quad ; \ i(t) = 61\cos(\omega t + 0{,}38) \end{array}}$$