

INTÉGRATION

Exercices

1 Étudier la nature des intégrales suivantes. Lorsque cela a un sens, on précisera leur valeur. Pour les intégrales 10 à 13, on pourra faire un changement de variable (parfois proposé entre parenthèses).

1. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$; 2. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2-1} dt$; 3. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 e^{1/t}} dt$; 4. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tan t dt$; 5. $\int_{\pi}^{+\infty} \left(2i - \frac{1}{x^2}\right) e^{ix^2} dx$
 6. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x[x]}$; 7. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$; 8. $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$; 9. $\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} dt$; 10. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$
 11. $\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} dt$; 12. $\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx \left(u = x - \frac{1}{x}\right)$; 13. $\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} dx \left(u = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$

2 Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes (α est un paramètre réel).

- $\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$; $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt$; $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+(t \ln t)^2} dt$; $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\frac{1}{t})e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$; $\int_0^1 \frac{\ln t}{(1-t)^{3/2}} dt$
 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^t} dt$; $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$; $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$; $\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt$; $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin x}{x^\alpha}\right) dx$

3 *Intégrales de Bertrand*

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Montrer les équivalences suivantes :

$$\left[\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx \text{ converge} \right] \iff [(\alpha > 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)].$$

$$\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^\alpha (-\ln x)^\beta} dx \text{ converge} \right] \iff [(\alpha < 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)].$$

4 Soit a et b deux réels strictement positifs.

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$ converge.
 2. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt$.
 3. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

5 Soit $f : t \mapsto \ln(\sin t)$ et $g : t \mapsto \ln(\cos t)$.

1. Montrer que f et g sont intégrables sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
 On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) dt$.
 2. Montrer que $I = J$ et calculer $I + J$.
 3. En déduire la valeur de I et J .

6 Étude de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt.$$

- (a) Justifier que I_n et J_n sont bien définis pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+1} - I_n = 0$. En déduire I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (c) Soit $\varphi : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \varphi(t) \sin((2n+1)t) dt = 0$.

- (d) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n - I_n) = 0$.
- (e) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = I$.

(f) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| dt$.

En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ n'est pas absolument convergente.

7 Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Montrer que la fonction F est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. Établir que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$.
3. À l'aide d'encadrements, montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} xF(x) = 0.$$

4. Justifier l'existence et calculer $\int_0^{+\infty} F(x) dx$.
5. À l'aide d'une intégration par parties, donner un équivalent lorsque $x \rightarrow +\infty$ de $F(x)$.

8 Fonction Gamma d'Euler

On pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Montrer que la fonction Γ a pour ensemble de définition $]0, +\infty[$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

9 Sommes de Riemann

Soit f une fonction positive, continue et décroissante de $]0, 1]$ dans \mathbb{R} . On pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Montrer que l'intégrale $\int_0^1 f$ converge si et seulement si la suite (S_n) converge et dans ce cas, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 f$.

10 Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

$$\int_0^\alpha \frac{\sin^n x}{\cos x} dx \text{ où } \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[; \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx ; \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}} dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{nt+t^3} dt ; \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin^n(t) dt ; \int_0^{+\infty} \frac{nf(t)}{1+n^2t^2} dt \text{ où } f \text{ est continue et bornée sur } \mathbb{R}_+$$

11 Établir les égalités suivantes.

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} x^n (1 - \sqrt{x}) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)} ; \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1} ; \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

12 Montrer que les fonctions suivantes sont continues puis de classe \mathcal{C}^1 sur I .

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx} dt, \quad I = [0, +\infty[; \quad g(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(1+x \sin^2 t) dt, \quad I = [0, +\infty[$$

$$h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2} dt, \quad I =]0, +\infty[\quad (\text{on pourra faire un changement de variable})$$

13 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on pose $I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+t^2)^n}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que I_n est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer I'_n en fonction de I_{n+1} .

2. Montrer que pour tout $n \geq 2$ et tout $x > 0$, on a $I_n(x) = \frac{\pi}{2} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-3)}{(n-1)! 2^{n-1}} x^{-\frac{2n-1}{2}}$.

14 *Intégrale de Gauss*

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$ et exprimer f' .

2. Calculer $f(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3. On note g l'application définie par $g(x) = f(x^2)$.

Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}$.

4. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

15 On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Montrer que l'on définit une fonction φ paire et continue sur \mathbb{R} en posant :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) dt.$$

2. Montrer que φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et déterminer une expression à l'aide d'une intégrale de $\varphi'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
3. Déterminer une constante α telle que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on ait :

$$\varphi'(x) = \alpha\varphi(x).$$

4. Expliciter $\varphi(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$ puis pour $x \in \mathbb{R}$.

16 *Fonction Gamma d'Euler (suite de l'exercice 8)*

On pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. (a) Soit $t > 0$, soit $(a, b) \in \mathbb{R}$ avec $b > a > 0$. Montrer que $\forall x \in [a, b]$, $t^{x-1} \leq t^{a-1} + t^{b-1}$.
 (b) Montrer que la fonction Γ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$ et donner une expression intégrale de $\Gamma^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
 (c) Déterminer les variations de Γ' et montrer que Γ' s'annule en un unique réel ξ dont on déterminera la partie entière.
 En déduire les variations de Γ .
2. Étudier les limites de Γ en 0 et en $+\infty$.
3. Soit $x > 0$.
 (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$
On pourra utiliser une intégration par parties.
 (b) En déduire que $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

17 *Transformée de Laplace*

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R}_+ à valeurs réelles.

Si x est un réel pour lequel l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$ converge alors on note :

$$L_f(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt.$$

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\alpha t} dt$ converge.

1. On suppose dans cette question seulement que $t \mapsto f(t)e^{-\alpha t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
 Montrer que L_f est bien définie et continue sur $]\alpha, +\infty[$.
2. Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on note $G(t) = \int_0^t f(s)e^{-\alpha s} ds$.
 (a) Montrer que G est bornée sur \mathbb{R}_+ .
 (b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $x \in]\alpha, +\infty[$, $L_f(x)$ existe et on a :

$$L_f(x) = (x - \alpha) \int_0^{+\infty} G(t)e^{-(x-\alpha)t} dt.$$

- (c) En déduire que L_f est continue sur $]\alpha, +\infty[$.