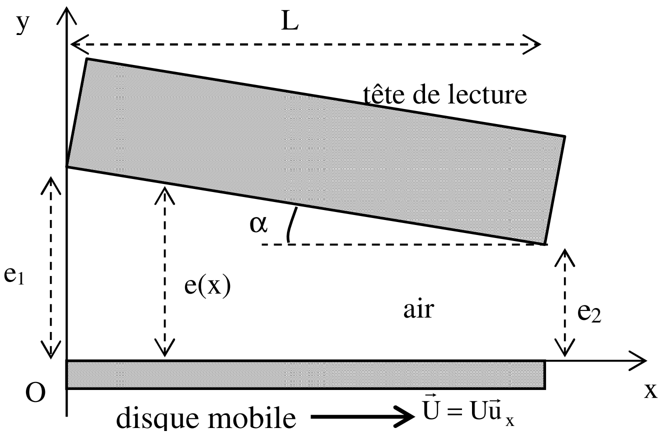
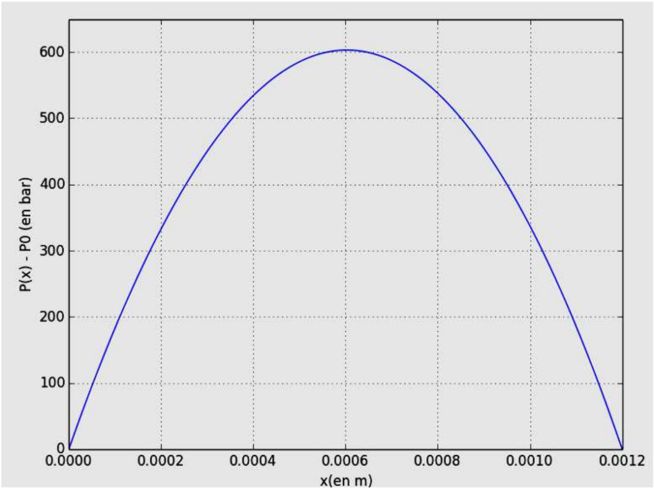
4.6 Ecoulements visqueux-Exercice 11

La lecture et l'écriture d'informations, sous forme de bits, est réalisée par une tête de lecture magnétique située à quelques nanomètres du disque dur. La sustentation de la tête de lecture est assurée par l'écoulement de l'air entre la tête et le disque en rotation.

On considère un disque dur de 3,5 pouces (8,9 cm) de diamètre tournant à la vitesse de 7200 tours par minute. La tête de lecture forme avec le disque un dièdre d'angle α très faible. On étudie l'écoulement de l'air dans le référentiel lié à la tête de lecture dans lequel le disque est localement en translation à la vitesse U selon Ox.

La tête de lecture est un carré de côté a = 1,2 mm. On note e(x) l'épaisseur locale du dièdre avec $e(0) = e_1$ et $e(L) = e_2$ avec typiquement $e(x) \approx 10$ nm et $L = a\cos\alpha \approx a$.
L'air de viscosité $\eta = 2.10^{-5}$ Pl est en écoulement stationnaire, la pression atmosphérique en dehors du dièdre vaut P_0 et la pesanteur est négligée. Le problème est supposé invariant selon la direction Oz.
On cherche un champ de vitesse de la forme $\vec{v} = v_x(x,y)\vec{u}_x + v_y(x,y)\vec{u}_y$ et un champ de pression P(x,y).





a-Evaluer U en périphérie du disque. En déduire que l'écoulement est incompressible.
Quelle équation peut-on alors écrire pour le champ de vitesse $\vec{v}$?

b-En évaluant les ordres de grandeurs de $\left|\frac{\partial v_x}{\partial x}\right|$ et $\left|\frac{\partial v_y}{\partial y}\right|$, montrer que $\vec{v} \approx v_x(x,y)\vec{u}_x$.

c-Ecrire l'équation de Navier-Stokes. Montrer par un raisonnement en ordre de grandeur que le terme convectif peut être négligé devant le terme visqueux. Montrer que la pression P ne dépend que de x.

d-En déduire l'équation simplifiée : $\frac{dP(x)}{dx} = \eta \frac{\partial^2 v_x(x,y)}{\partial y^2}$ puis déterminer le champ de vitesse $v_x(x,y)$.

e-Calculer le débit volumique D_v à travers la section d'abscisse x et en déduire : $\frac{dP(x)}{dx} = -\frac{6\eta}{e^2(x)}\left(\frac{2D_v}{e(x)L} - U\right)$

f-Exprimer e(x) en fonction de e_1, e_2, x et L Justifier que $\frac{dP(x)}{dx} = -\alpha\frac{dP(e)}{de}$.
Intégrer la relation de la question précédente pour en déduire le champ de pression P(e(x)).

g-Quelles sont les conditions aux limites pour la pression en x = 0 et x = L ? En déduire que $D_v = UL\frac{e_1 e_2}{e_1 + e_2}$.

h-Montrer que la pression dans l'écoulement s'écrit finalement : $P(x) = P_0 + \frac{6\eta U}{\alpha}\frac{(e(x)-e_2)(e_1-e(x))}{e^2(x)(e_1+e_2)}$

i-On donne le graphe de la différence de pression $P(x) - P_0$ pour $e_1 = 10{,}1$ nm et $e_2 = 10$ nm.
Commenter l'allure du champ de pression. Estimer graphiquement l'ordre de grandeur de la force de pression exercée par l'écoulement sur la tête de lecture. La sustentation de la tête de lecture est-elle possible ?

4.6 Ecoulements visqueux-Exercice 11

---

a-$U = R\omega$ avec $R = 4{,}45.10^{-2}$ m et $\omega = 7200.2\pi/60$ => $U = 30\ m.s^{-1}$ $U << c_{son}$ => incompressible

<u>Incompressibilité</u> => $\mathrm{div}\vec{v} = 0$ => $\boxed{\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0}$

b-On en déduit : $\left|\frac{\partial v_x}{\partial x}\right| = \left|\frac{\partial v_y}{\partial y}\right|$ Or : $\left|\frac{\partial v_x}{\partial x}\right| \approx \frac{v_x}{L}$ et $\left|\frac{\partial v_y}{\partial y}\right| \approx \frac{v_y}{e}$ d'où : $v_y \approx v_x \frac{e}{L}$

On a $e \approx 10$ nm << L = 1,2 mm. On peut donc supposer $v_y << v_x$ et écrire : $\boxed{\vec{v} \approx v_x(x, y)\vec{u}_x}$

c-<u>Equation de Navier-Stokes</u> : $\mu(\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}(M) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}P(M) + \eta\Delta\vec{v}(M)$

$\left\|\mu(\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}(M)\right\| \approx \frac{\mu v_x^2}{L} \approx \frac{1.30^2}{10^{-3}} \approx 10^6$ $\left\|\eta\Delta\vec{v}(M)\right\| \approx \eta\frac{v_x}{e^2} \approx 10^{-5}\frac{30}{10^{-16}} \approx 3.10^{12}$

Donc : $\boxed{\left\|\mu(\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}(M)\right\| << \left\|\eta\Delta\vec{v}(M)\right\|}$

Equation de Navier-Stokes en projection selon Oy : $0 = -\frac{\partial P}{\partial y}$ => <u>P ne dépend que de x</u>

d-En projection selon Ox : $0 = -\frac{dP}{dx} + \eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$

=> $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta}\frac{dP}{dx}$ => $v_x = \frac{1}{2\eta}\frac{dP}{dx}y^2 + Ay + B$

<u>Conditions aux limites</u> : $v_x(0) = U = B$

$v_x(e) = 0 = \frac{1}{2\eta}\frac{dP}{dx}e^2 + Ae + U$ => $A = -\frac{U}{e} - \frac{1}{2\eta}\frac{dP}{dx}e$

Donc : $\boxed{v_x(x, y) = \frac{1}{2\eta}\frac{dP}{dx}(y^2 - ey) + U(1 - \frac{y}{e})}$

e- $D_v = \iint_{section} v_x(x, y)dydz = \int_0^e [\frac{1}{2\eta}\frac{dP}{dx}(y^2 - hy) + U(1 - \frac{y}{h})]dy\int_0^L dz = L[\frac{1}{2\eta}\frac{dP}{dx}(\frac{e^3}{3} - e\frac{e^2}{2}) + U(e - \frac{e^2}{2e})]$

Donc : $\boxed{D_v = L[-\frac{1}{12\eta}\frac{dP}{dx}e^3 + U\frac{e}{2}]}$ Puis : $\boxed{\frac{dP(x)}{dx} = -\frac{6\eta}{e^2(x)}\left(\frac{2D_v}{e(x)L} - U\right)}$

f-On a : $\boxed{e = e_1 - \frac{e_1 - e_2}{L}x}$

On a : $\frac{dP}{dx} = \frac{dP}{de}\frac{de}{dx} = -\frac{e_1 - e_2}{L}\frac{dP}{de} = -\tan\alpha\frac{dP}{de} \approx -\alpha\frac{dP}{de}$

D'où : $\frac{dP}{de} = \frac{6\eta}{\alpha}\left(\frac{2D_v}{Le^3} - \frac{U}{e^2}\right)$ qui s'intègre en : $\boxed{P = \frac{6\eta}{\alpha}\left(-\frac{D_v}{Le^2} + \frac{U}{e}\right) + K}$

g-Conditions aux limites : $P(x = 0) = P_0 = \frac{6\eta}{\alpha}\left(-\frac{D_v}{Le_1^2} + \frac{U}{e_1}\right) + K$ et $P(x = L) = P_0 = \frac{6\eta}{\alpha}\left(-\frac{D_v}{Le_2^2} + \frac{U}{e_2}\right) + K$

Par soustraction des deux relations, P_0 et K s'éliminent et on trouve : $\boxed{D_v = UL\frac{e_1e_2}{e_1 + e_2}}$

h-On remplace K et D_v dans l'expression de P pour obtenir l'expression de l'énoncé.

g-Il y a une forte surpression au centre de la tête de lecture.

On a $P_{moyen} \approx 400$ bar donc : $F \approx P_{moyen}a^2 \approx 60$ N C'est largement suffisant pour la sustentation.
