

4.7.1 Euler-Exercice 2

Sous l'effet d'une baisse de pression brutale, des bulles de gaz peuvent se former dans l'eau : ce phénomène appelé cavitation est particulièrement important au voisinage des hélices de navires. Il a des effets néfastes car l'implosion des bulles de gaz équivaut à de multiples impacts sur les hélices, provoquant leur usure. Le but de l'exercice est l'étude de l'implosion d'une bulle.

A l'instant $t = 0$ on crée dans un fluide une cavité de rayon R_0 . Le fluide, de masse volumique ρ , est en écoulement parfait incompressible. La pression à l'infini vaut P_0 et les forces de pesanteur sont négligées.

On cherche à déterminer le temps τ au bout duquel la cavité aura disparu.

A l'instant $t > 0$ le champ des vitesses est donné par : $\vec{v}(M, t) = v(r, t)\vec{u}_r$ et le rayon de la cavité est $R(t)$.

a-Prévoir qualitativement les variations de τ en fonction de R_0 , ρ et P_0 .

b-Justifier que le mouvement du fluide est potentiel.

c-Ecrire une relation entre r , v , R et dR/dt traduisant la conservation de la masse.

d-Ecrire l'équation d'Euler. En prenant une pression nulle à l'intérieur de la cavité, établir une équation différentielle en $R(t)$ par intégration de l'équation d'Euler.

e-On montre qu'une nouvelle intégration conduit à : $\frac{dR}{dt} = -\sqrt{\frac{2P_0}{3\rho}} \sqrt{\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - 1}$. En déduire τ .

A.N : calculer τ avec $R_0 = 1\text{mm}$, $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ et de $I = \int_0^1 \sqrt{x^3 / (1 - x^3)} dx \approx 1,29$

4.7.1 Euler-Exercice 2

a-Plus le rayon initial de la bulle est grand, plus τ est grand.

Plus la pression du liquide sur la bulle est grande, plus τ est petit.

Plus la masse volumique du liquide est grande, plus celui-ci est inerte donc plus τ est grand.

b-La seule dérivée spatiale non nulle du champ de vitesse est $\frac{\partial v_r}{\partial r}$.

Or le rotationnel du champ de vitesse ne contient que des dérivées croisées (dérivée d'une composante selon un axe par rapport à la coordonnée selon un autre axe). Donc le rotationnel du champ de vitesse est nul.

L'écoulement est potentiel.

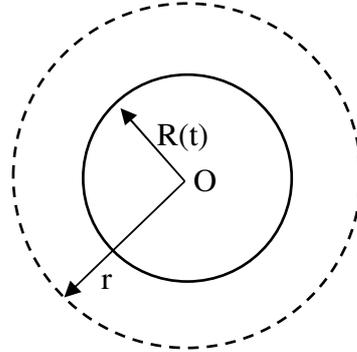
c-Débit volumique sortant à travers la sphère de rayon r :

$$q_v = \iint_{\text{sphère}} v(r, t) \vec{u}_r \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 \cdot v(r, t)$$

Écoulement incompressible : $q_v = \text{cste}$ quel que soit r

$$\text{Donc : } 4\pi r^2 \cdot v(r, t) = 4\pi R^2(t) \cdot v(R(t), t) = 4\pi R^2(t) \cdot \frac{dR}{dt}(t)$$

$$\text{D'où : } \boxed{v(r, t) = \frac{R^2(t)}{r^2} \frac{dR}{dt}(t)}$$



$$\text{d-} \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} + (\text{rot} \vec{v}) \wedge \vec{v} \right] = -\text{grad} P \quad (\text{pesanteur négligée})$$

En projection selon \vec{u}_r et sachant que l'écoulement est irrotationnel : $\boxed{\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v^2}{2} \right) \right] = -\frac{\partial P}{\partial r}}$

On calcule d'après la question c- : $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{R^2}{r^2} \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{2R}{r^2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2$ et $\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -2 \frac{R^4}{r^5} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2$

$$\text{Donc : } \rho \left[\frac{R^2}{r^2} \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{2R}{r^2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - 2 \frac{R^4}{r^5} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right] = -\frac{\partial P}{\partial r}$$

A t fixé, on intègre pour r variant de $R(t)$ à l'infini et P variant de 0 à P_0 :

$$\rho \left[R^2 \frac{d^2 R}{dt^2} \int_R^{+\infty} \frac{dr}{r^2} + 2R \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \int_R^{+\infty} \frac{dr}{r^2} - 2R^4 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \int_R^{+\infty} \frac{dr}{r^5} \right] = - \int_0^{P_0} \frac{\partial P}{\partial r} dr$$

$$\text{D'où l'équation différentielle : } \boxed{\frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{P_0}{\rho} = 0}$$

e-On a : $\frac{dR}{dt} = -\sqrt{\frac{2P_0}{3\rho}} \sqrt{\left(\frac{R_0}{R} \right)^3 - 1}$ Séparation des variables : $-\sqrt{\frac{3\rho}{2P_0}} \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R_0}{R} \right)^3 - 1}} = dt$

On pose : $x = \frac{R}{R_0}$ d'où : $-\sqrt{\frac{3\rho}{2P_0}} \frac{R_0 dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{x} \right)^3 - 1}} = dt$

puis on intègre pour x variant de 1 (à $t=0$) à 0 (à $t=\tau$) : $-R_0 \sqrt{\frac{3\rho}{2P_0}} \int_1^0 \sqrt{\frac{x^3}{1-x^3}} dx = \int_0^\tau dt$

$$\text{Donc : } \boxed{\tau = R_0 \sqrt{\frac{3\rho}{2P_0}} I} \quad \text{A.N : } \underline{\tau = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ s}}$$