# Corrigé du devoir surveillé n° 5

## I Interaction charge dipôle

1 La particule est soumise à un champ électrostatique qui dérive du potentiel $V = \dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ et a donc une énergie potentielle $E_p = qV = \dfrac{qp\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ (la force électrostatique correspondante est donc conservative).

On néglige comme d'habitude la pesanteur, dès lors le système est conservatif et l'énergie mécanique est $E_m = E_c + E_p = \dfrac{1}{2}mv^2(\theta) + \dfrac{qp\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \text{Cte} = 0$, car à l'instant initial la vitesse est nulle, et $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. On en tire $v(\theta) = \sqrt{-\dfrac{2qp\cos\theta}{4\pi m\varepsilon_0 R^2}}$, expression qui n'a de sens que pour $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$ si $q > 0$ et pour $\theta \in [-\pi/2, +\pi/2]$ si $q < 0$.

2 On applique le principe fondamental de la dynamique à la particule dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. La particule est soumise à la force électrostatique $q\overrightarrow{E} = \dfrac{qp}{4\pi\varepsilon_0 R^3}(2\cos\theta\,\overrightarrow{e}_r + \sin\theta\,\overrightarrow{e}_\theta)$ en polaires dans le plan du cercle, et à la réaction du cercle. En projection sur la base $(\overrightarrow{e}_r, \overrightarrow{e}_\theta, \overrightarrow{e}_Z)$ (le troisième vecteur étant perpendiculaire au plan du cercle) il vient en écrivant $\overrightarrow{F} = F_r\overrightarrow{e}_r + F_Z\overrightarrow{e}_Z$ (la réaction n'a pas de composante selon $\overrightarrow{e}_\theta$ car le mouvement est sans frottement) :

$-mR\dot{\theta}^2 = -m\dfrac{v^2}{R} = \dfrac{2qp\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^3} + F_r,$

$mR\ddot{\theta} = \dfrac{qp\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^3},$

$0 = 0 + F_Z.$

La première équation donne $F_r = -m\dfrac{v^2}{R} - \dfrac{2qp\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = 0$ d'après la question précédente !

En conclusion $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$ ! !

3 On voit donc que le support circulaire ne joue aucun rôle. Dès lors le mouvement sera encore circulaire même en l'absence du support.

4 L'équation demandée est celle qui découle de l'application du PFD en projection sur la direction du mouvement (on peut aussi l'obtenir par dérivation de la conservation de l'énergie mécanique), équation que l'on peut réécrire sous la forme

$\ddot{\theta} - \dfrac{qp\sin\theta}{4\pi m\varepsilon_0 R^4} = 0$. C'est l'équation d'un pendule simple dans un champ de pesanteur uniforme en le lâchant sans vitesse initiale à partir d'une position horizontale.

Il y a deux positions d'équilibre : $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. Si $q > 0$ la première est instable, la deuxième stable. Si $q < 0$ c'est l'inverse. Les oscillations ont bien sûr lieu autour de la position d'équilibre stable.

Exercice II

Q1 La différence d'électronégativité des atomes impliqués dans une liaison fait apparaître une séparation de charge (charge $\delta^-$ sur l'atome le plus électronégatif et $\delta^+ = -\delta^-$ sur l'autre atome) d'où apparition d'un moment dipolaire

Loi $\boxed{\vec{P_1} = aq\vec{u_y}}$

Q2 Cf cours Approximation dipolaire = observation des effets à grande distance devant la taille caractéristique de la distribution. Techniquement : dl à l'ordre 1 en $a/r$ et principe de superposition $\Rightarrow$

$$V = \frac{P_1 \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Q3 Relation champ potentiel $\vec{E} = -\vec{grad}\, V$

$$\vec{E} = \frac{P_1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\, \vec{e_r} + \sin\theta\, \vec{e_\theta}\right)$$

Q4 Cours $\vec{\Gamma} = \vec{P_2} \wedge \vec{E_1}(M)$

$$E_{p12} = -\vec{P_2} \cdot \vec{E_1}(M)$$

Le couple tend à aligner $\vec{P_2}$ sur (et dans le sens de) la ligne de champ de $\vec{E_1}$ passant par M, de manière à annuler le moment subi. Dans cette situation on vérifie bien qu'en écartant un peu $\vec{P_2}$ de cette direction, le couple est un couple de rappel vers cette position d'équilibre.

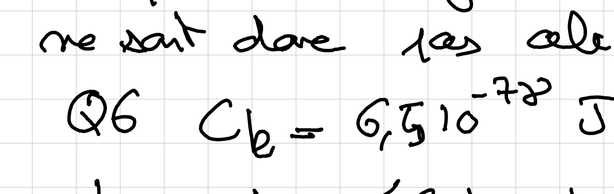
Q5 $E_{p12} = \frac{-P^2}{2\pi\varepsilon_0 r^3} = -1{,}6\,10^{-21}$ J

$k_BT = 4\,10^{-21}$ J $\gg E_{p12}$

d'inversion d'orientation coûte $3{,}2\,10^{-21}$ J qui peut donc être fournie par l'agitation thermique ! Les dipôles ne sont donc pas alignés en moyenne !

Q6 $C_k = 6{,}5\,10^{-77}$ J.m$^6$

Le graphe de $\langle E_{12}\rangle$ est de la forme




qui correspond bien à 1 force attractive. On peut le vérifier aussi en calculant $\vec{F} = -\vec{grad}\langle E_{p12}\rangle$

Q7 $\dim(A) = L^3 \dim(f) = L^3 \frac{\dim(F)}{L^2}$
$= L^3 \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^2T^{-2} = \dim(\text{Energie})$

($\frac{1}{2}mv^2$ par exemple).

Q8 Force d'une sétule

$$500 \times \frac{A^{10^{-19}}}{6\pi\, 10^{-23}} \times (2\,10^{-7})^2 = 10^{-4}\,N$$

Poids $mg = 0{,}49$ N

Il faut donc $\frac{mg}{10^{-4}} = 4{,}5\,10^3$ sétules

Soit un pourcentage 0,077 %

On trouve curieusement deux fois plus que ce qui a été déterminé par les chercheurs. Il y a donc a priori d'autres interactions en jeu.

Dans la pratique, il y a sûrement plus de sétules en raison des impuretés entre les pattes et les surfaces qui diminuent vraisemblablement l'intensité des forces de Van der Waals. Il est possible également que la surface effective des ~~spatules~~ sétules ne soit pas aussi grande que celle qu'on a calculée d'où un plus grand nombre de sétules/spatules à utiliser.

# III D'après Mines-Ponts 2013 Physique I Première partie

1 Compte tenu des hypothèses ($\rho$ ne dépendant que de $x$, et non prise en compte des effets de bord) on peut affirmer que tout plan contenant une direction parallèle à $Ox$ est un plan de symétrie de la distribution. Dès lors soit $M$ un point quelconque de l'espace. Il existe une infinité de plans de symétrie de la distribution contenant l'axe $Mx$. Le champ électrostatique doit appartenir à tous ces plans donc à leur intersection, à savoir l'axe $Mx$. Dès lors le champ électrostatique est porté uniquement par $\overrightarrow{u}_x$. L'invariance par translation parallèlement à $Oy$ et $Oz$, fait que ce champ ne doit pas dépendre ni de $y$ et ni de $z$, et pour conclure on peut écrire $\overrightarrow{E} = E_x(x)\overrightarrow{u}_x$.

On peut aussi justifier cela de manière plus efficace en partant du fait que $V$ ne dépende que de $x$. Par la relation champ potentiel on voit alors que les composantes de $\overrightarrow{E}$ selon $Oy$ et $Oz$ sont nulles, et que $E_x = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$ qui est elle même une fonction uniquement de $x$ !

Avec la surface de Gauss proposée le flux sortant est $SE(x+\mathrm{d}x) - SE(x) = S\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$. La charge intérieure est simplement $\rho(x)S\mathrm{d}x$. L'application du théorème de Gauss donne alors $S\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \dfrac{\rho(x)S\mathrm{d}x}{\varepsilon_0}$, soit après simplification $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\rho(x)}{\varepsilon_0}$.

Par utilisation de la relation champ potentiel on a $E = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$. En reportant il vient finalement $\dfrac{d^2V}{dx^2} + \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$, ce qui est l'équation attendue.

2 Le poids d'un électron est d'environs $10 \times 10^{-30} = 10^{-29}$ $N$. Pour une charge de l'ordre de $10^{-19}$ $C$, il suffit d'un champ électrique de l'ordre de $10^{-8}$ $V/m$ pour avoir une force électrique 100 fois supérieure : on pourra donc négliger le poids d'un électron par rapport à la force électrique.

Pour être plus convaincant encore on peut utiliser les valeurs numériques trouvées plus loin dans l'énoncé pour évaluer le champ électrique : $V_A = 10$ $V$ et $d = 3$ $mm$, soit $E = 3.10^3$ $V/m$. On est largement au-dessus du $10^{-8}$ $V/m$ évoqué ci-dessus.

3 $E_p = qV$ (ce qui se montre facilement par le travail de la force électrostatique ou par l'utilisation du fait que $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V)$).

4 Un électron etudié ici est un système conservatif. Dès lors la constance de l'énergie mécanique donne $E_c + E_p = Ct$, soit $0 - eV_C = \dfrac{1}{2}mv(x)^2 - eV(x)$, soit $\overrightarrow{v}(x) = \sqrt{\dfrac{2eV}{m}}\overrightarrow{e}_x$. Cette question montre au passage qu'on doit avoir $V(x) > 0$.

5 Dans la question 7 on voit que l'intensité doit être positive. Pour que cela soit le cas il faut compter l'intensité positivement dans le sens $A$ vers $C$ ! ! On a alors $I(x) = -S\rho(x)v(x)$ (signe $-$ normal car $\rho(x) < 0$) ! !

6 En régime stationnaire $\overrightarrow{j}$ est à flux conservatif, et donc ici $I$ ne dépend pas de $x$. Pour cela il suffit de considérer la même surface fermée que celle utilisée pour le théorème de Gauss de la première question. Le flux de $\overrightarrow{j}$ à travers cette surface fermée est nulle, ce qui donne facilement $I(x) = I(x + \mathrm{d}x)$, et donc $I$ indépendant de $x$.

7 En éliminant $v$ dans $I$, puis en en déduisant $\rho$ en fonction de $V$ il reste finalement $\dfrac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{I}{\varepsilon_0 S}\sqrt{\dfrac{m}{2eV}} = \dfrac{a}{\sqrt{V}}$

8 On multiplie par le facteur intégrant $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$, soit $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{a}{\sqrt{V}}\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$. On reconnaît à gauche la dérivée de $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)^2$ et à droite celle de $2a\sqrt{V}$. On a donc par une première intégration

$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)^2 = 2a\sqrt{V} + Cte$. L'énoncé suppose le potentiel et le champ électrique nuls en $x = 0$, ce qui se traduit par $V(0) = 0$ et $\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = 0$, et donc $Cte = 0$. Il reste $\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)^2 = 2a\sqrt{V}$. On a alors $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = 2\sqrt{a}V^{1/4}$. On sépare alors les variables : $\frac{\mathrm{d}V}{V^{1/4}} = 2\sqrt{a}\mathrm{d}x$. L'intégration donne $\frac{4}{3}V^{3/4} = 2\sqrt{a}x + cte$. La nullité du potentiel en $x = 0$ donne $Cte = 0$ et donc $V = \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} a^{2/3}x^{4/3}$.

9 On exprime $V_A$ à l'aide de la relation précédente prise en $x = d$, puis on explicite $a$ en fonction de $I$ ce qui donne pour finir : $I = S\varepsilon_0\sqrt{\frac{2e}{m}}\frac{4}{9d^2}V_A^{3/2}$.

10 Cette relation n'est pas vraie si $V_A < 0$. En effet, dans ce cas, les électrons arrachés sur la cathode ne peuvent être accélérés par le champ électrique qui dans ce cas est dirigé de $C$ vers $A$, et donc ne peuvent pas atteindre l'anode. Ils restent donc sur la cathode, et l'intensité est donc nulle.

11 L'application numérique donne $I = 2,46\ mA$ ce qui est faible. On s'attend pour une diode à une intensité bien plus forte pour une telle tension.