Centrale PSI 2017 - Physique Chimie 1

Corrigé proposé par S. Laurette pour l'UPS - Peut être diffusé librement aux étudiants
relu par P. Colin, N. Lyotard, L. Beau et M. Albrecht

Pour toute coquille ou remarque : simon.laurette@prepas.org

I Champ électrique dans un électrofiltre

I.A – *Champ électrique à vide et tension seuil*

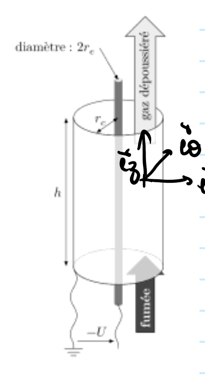
Selon des données expérimentales, l'ionisation du gaz au voisinage de l'émettrice se produit lorsque la norme du champ électrique y dépasse une valeur seuil E_0 dépendant du rayon r_e de cette électrode, de la pression et de la température. Dans tout le problème, $r_e = 1{,}25$ mm et $E_0 = 4{,}4 \times 10^6$ V·m^{-1}.

I.A.1) Pour une configuration donnée des électrodes, le champ électrique $\vec{E}$ et le potentiel électrostatique V dans l'espace inter-électrode dépendent de la tension U imposée. Pour les déterminer, on se place à la limite d'apparition du courant ce qui conduit à supposer l'espace inter-électrode vide de charge. Dans ces conditions, comment s'écrit l'équation de Poisson ?

vide de charge $\Rightarrow \rho = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta V = 0}$

I.A.2) Électrofiltre humide

a) On considère tout d'abord l'électrofiltre humide, tubulaire (figure 1b). Le rayon de la collectrice portée à la masse est noté r_c. En choisissant un système de coordonnées bien adapté et en négligeant les effets de bord, de quelles variables le potentiel électrostatique V dépend-il ? Donner son expression en fonction de U, r_e et r_c.



(b) Électrofiltre humide

- coordonnées cylindriques
- par invariance du système
  - par rotation d'angle θ
  - par translation suivant $\vec{e_z}$

$\Rightarrow V = V(r)$

$\Rightarrow \Delta V = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0$

$\Rightarrow r\frac{dV}{dr} = A \Rightarrow \frac{dV}{dr} = \frac{A}{r}$

et $V(r) = A \ln(r) + B$

or $\begin{cases} V(r_c) = 0 \\ V(r_e) = -U \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\ln(r_c) + B = 0 \\ A\ln(r_e) + B = -U \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\ln\left(\frac{r_c}{r_e}\right) = U \\ B = -A\ln(r_c) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{U}{\ln\left(\frac{r_c}{r_e}\right)} \\ B = -\dfrac{U\ln(r_c)}{\ln\left(\frac{r_c}{r_e}\right)} \end{cases} \Rightarrow V(r) = \dfrac{U}{\ln\left(\frac{r_c}{r_e}\right)} \times \ln(r) - \dfrac{U \times \ln(r_c)}{\ln\left(\frac{r_c}{r_e}\right)}$

$$\Rightarrow \boxed{V(r) = \frac{U}{\ln\left(\frac{r_c}{r_e}\right)} \times \ln\left(\frac{r}{r_c}\right)}$$

b) Exprimer le champ électrique au contact de l'émettrice et en déduire la valeur U_0 à donner à U pour qu'il atteigne la valeur E_0.

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V) = -\frac{dV}{dr}\vec{e_r} = -\frac{A}{r}\vec{e_r} = \boxed{\frac{-U}{r\ln\left(\frac{r_c}{r_e}\right)}\vec{e_r} = \vec{E}}$$

L'ionisation se produit en $r = r_e$

$\Rightarrow$ Il faut $E(r_e) \geqslant E_0 \Rightarrow \dfrac{U}{r_e \ln\left(\frac{r_c}{r_e}\right)} \geqslant E_0$

$$\Rightarrow \boxed{U \geqslant \underbrace{E_0\, r_e \ln\left(\frac{r_c}{r_e}\right)}_{U_0}}$$

c) Calculer numériquement U_0 pour $r_c = 150\,\mathrm{mm}$.

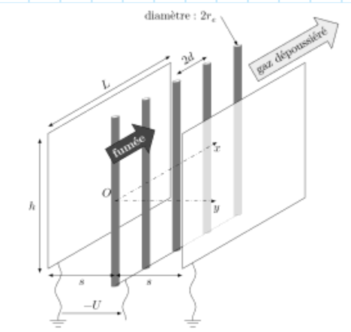
AN : $U_0 = 4{,}4.10^{6} * 1{,}25.10^{-3} * \ln\left(\dfrac{150.10^{-3}}{1{,}25.10^{-3}}\right) = \underline{26\,\mathrm{kV}}$

I.A.3) Électrofiltre sec

On raisonne toujours sous les hypothèses de la question I.A.1, mais on considère désormais un électrofiltre sec formé de plaques et de fils, caractérisé par les distances s et d définies sur la figure 1a. L'origine des coordonnées est placée sur l'un des fils, à égale distance des deux collectrices. Tout effet de bord étant négligé, le potentiel électrostatique est donné par

$$V(x,y,z) = \frac{U}{\Lambda}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln\left(\frac{\cosh\left(\frac{\pi(x-2md)}{2s}\right) - \cos\left(\frac{\pi y}{2s}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi(x-2md)}{2s}\right) + \cos\left(\frac{\pi y}{2s}\right)}\right)$$

a) Vérifier que cette expression est compatible avec la présence des collectrices et trouver l'expression de Λ en fonction de d, s et r_e.



La condition à respecter, due aux collectrices est :

• $V(x,s,z) = V(x,-s,z) = 0 \quad \forall (x,z)$

or $V(x,s,z) = \dfrac{U}{\Lambda}\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln\underbrace{\left[\frac{\overbrace{\mathrm{ch}\left(\frac{\pi(x-2md)}{2s}\right)}^{1} - \cancel{\cos(\pi/2)}^{0}}{\mathrm{ch}\left(\frac{\pi(x-2md)}{2s}\right) + \cancel{\cos \pi/2}^{0}}\right]}_{0} \underline{\underline{= 0}}$

De même, $\boxed{V(x,-s,z) = 0}$

L'expression est donc compatible avec la présence des collectrices.

De plus, au niveau de l'électrode émettrice

$\forall z$:

• $V(0,r_e,z) = -U \Rightarrow \dfrac{U}{\Lambda}\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \ln\left(\frac{\mathrm{ch}\left(-\frac{\pi md}{s}\right) - \cos\left(\frac{\pi r_e}{2s}\right)}{\mathrm{ch}\left(-\frac{\pi md}{s}\right) + \cos\left(\frac{\pi r_e}{2s}\right)}\right) = -U \quad (*)$

$V(0,-r_e,z) = -U$

$V(r_e,0,z) = -U$

$V(-r_e,0,z) = -U$

$\Rightarrow \dfrac{U}{\Lambda}\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \ln\left(\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{\pi(r_e-2md)}{2s}\right) - 1}{\mathrm{ch}\left(\frac{\pi(r_e-2md)}{2s}\right) + 1}\right) = -U \quad (**)$

Posons $X = \dfrac{\pi(r_e - 2md)}{2s}$; $(**) \Rightarrow \dfrac{1}{\Lambda}\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \ln\frac{\mathrm{ch}(X)-1}{\mathrm{ch}(X)+1} = -1$

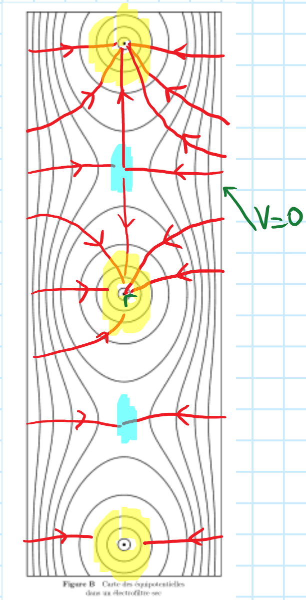
Posons $X = \frac{\pi(r_e - 2md)}{2s}$; $(**) \Rightarrow \frac{1}{\Lambda}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \ln \frac{ch(X)-1}{ch(X)+1} = -1$

utile ? or $\frac{ch X - 1}{ch X + 1} = \frac{e^X + e^{-X} - 2}{e^X + e^{-X} + 2} = \frac{(e^{X/2} - e^{-X/2})^2}{(e^{X/2} + e^{-X/2})^2}$

$$= \left[\frac{sh(X/2)}{ch(X/2)}\right]^2 = th(X/2)^2$$

$$\Rightarrow \Lambda = -\sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2\ln\left(th\left(\frac{\pi(r_e - 2md)}{4s}\right)\right)$$

b) Les équipotentielles sont représentées sur la figure du document réponse. Compléter cette figure en y traçant en couleur des lignes de champ orientées. Quelles sont les zones de fort champ ? Existe-t-il des points où le champ électrique s'annule ?



$\vec{E} \perp$ aux équipotentielles

$\vec{E}$ descend les potentiels

zones de fort champ lorsque les ldc de $\vec{E}$ se resserrent

point de champ $\vec{E}$ nul (intersection à deux lignes de chp $\perp$)

V=-U

c) La figure 2 montre le comportement de $|E_y(x=0, y, z=0)|$ en fonction de y. Ce graphique, obtenu pour $d/s = 4/3$, utilise les variables adimensionnées $|E_y|/(U/s)$ (en ordonnée) et y/s (en abscisse).

Quelle valeur U_0 faut-il donner à U pour provoquer l'ionisation près de l'électrode émettrice ? Exprimer la réponse en fonction de s et E_0, puis estimer la valeur numérique de U_0 pour $s = 150$ mm. Comparer l'ordre de grandeur obtenu avec celui concernant l'électrofiltre tubulaire.

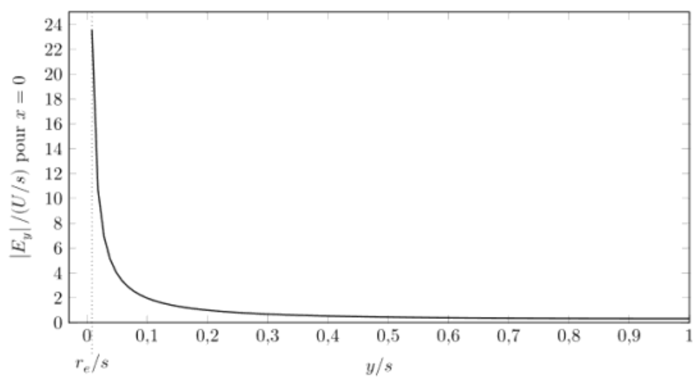


Figure 2 Variations du champ électrique dans un électrofiltre sec

A proximité de l'émettrice, $E_y/(U/s) \simeq 24$

$\Rightarrow E_y \simeq 24\, U/s \rightarrow U = E_y \frac{s}{24}$

$\Rightarrow U_0 = E_0 \frac{s}{\ldots}$ AN $U_0 = 4{,}4.10^6 \times \frac{150.10^{-3}}{\ldots} = 28$ kV

$$\Rightarrow \boxed{U_0 = E_0 \frac{s}{24}} \qquad \underline{AN} \quad U_0 = 4{,}4.10^6 \times \frac{150.10^{-3}}{24} = \underline{28\,kV}$$

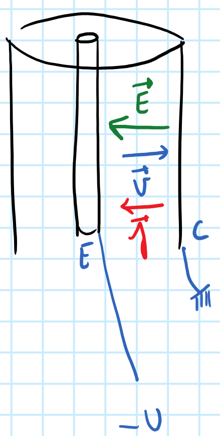
Même ordre de grandeur que pour l'électrofiltre tubulaire.

I.B – *Influence des charges d'espace*

Dès lors que la tension U dépasse la valeur seuil U_0, un courant d'intensité i s'instaure dans l'électrofiltre et l'espace inter-électrode se peuple d'anions dont la présence, caractérisée par les densités volumiques de charge $\rho(M)$ et de courant $\vec{j}(M)$, modifie le champ électrique. Ces anions sont supposés tous identiques et se déplacent dans le champ électrique $\vec{E}(M)$ avec une vitesse $\vec{v}(M) = -b\vec{E}(M)$ avec $b = 3{,}1 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^2 \cdot V^{-1} \cdot s^{-1}}$ dans les conditions envisagées.

La connaissance des champs couplés $\vec{E}(M)$ et $\rho(M)$ constitue un enjeu majeur car ces grandeurs déterminent la migration des grains de poussière. Dans un électrofiltre sec, leur détermination s'appuie sur de lourdes méthodes numériques. Nous l'abordons ici uniquement dans le cas des électrofiltres humides en négligeant tout effet de bord. L'influence des poussières mobiles sur le champ est négligée.

I.B.1) La collectrice tubulaire et l'émettrice coaxiale ont pour hauteur h. On note $j = \vec{j} \cdot \vec{e}_r$ et $E = \vec{E} \cdot \vec{e}_r$ les projections sur le vecteur unitaire radial usuel des coordonnées cylindriques et r la distance d'un point à l'axe. Un courant d'intensité $i > 0$ circule radialement d'une électrode vers l'autre. Dans quel sens ? Exprimer j en fonction des variables qui s'imposent.



$\vec E$ descend les potentiels

$\vec v = -b\vec E$ de sens opposé à $\vec E$

$\vec j = \rho \vec v$ dans le sens de $\vec E$

$\rho < 0$ (anions)

$\Rightarrow$ $i > 0$ va de la collectrice à l'émettrice

$$\vec j = \rho \vec v = -\rho b \vec E \quad \Rightarrow \boxed{j = -\rho b E}$$

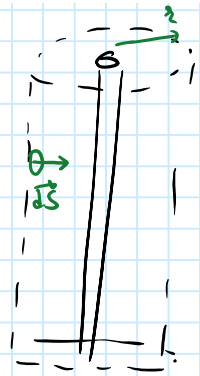
I.B.2) Exprimer la densité volumique de charge en fonction de i, E, h, r et b.

or $i = \iint_{\substack{\text{cylindre}\\ \text{de rayon } r \\ \text{de hauteur } h}} \vec j \cdot \vec{dS} = \iint j\vec{e_r} \cdot dS(-\vec{e_r}) = -j\iint dS$

$= -j\,2\pi r h$

$i = \rho b E 2\pi r h$

$$\Rightarrow \boxed{\rho = \frac{i}{E b 2\pi r h}}$$



I.B.3) Quelle équation de l'électromagnétisme exprime localement la modification du champ électrique par les ions ? Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$rE\frac{\mathrm{d}(rE)}{\mathrm{d}r} = \frac{ir}{2\pi h \varepsilon_0 b}$$

Maxwell Gauss : $\operatorname{div} \vec E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{i}{E b 2\pi r h \varepsilon_0}$

or $\vec E = E(r)\,\vec{e_r}$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec E = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rE) = \frac{i}{rE\, b 2\pi h \varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{rE\,\frac{d(rE)}{dr} = \frac{ir}{2\pi h \varepsilon_0 b}}$$

I.B.4) À une certaine distance $r_0 > r_e$ de l'axe, le champ électrique prend la valeur E_0. En déduire l'expression de E.

Posons $u = r * E$

$$\int_r^{r_0} u * du = \int_r^{r_0} \frac{i}{2\pi\varepsilon_0 h b}\, r\,dr$$

$$\left[\frac{u^2}{2}\right]_r^{r_0} = \frac{i}{2\pi\varepsilon_0 h b}\left[\frac{r^2}{2}\right]_r^{r_0}$$

$$\frac{1}{2}\left(r_0^2 E_0^2 - r^2 E(r)^2\right) = \frac{i}{2\pi\varepsilon_0 h b}\,\frac{r_0^2 - r^2}{2}$$

$$\frac{r_0^2 E_0^2}{r^2} = E^2(r) + \frac{i}{2\pi\varepsilon_0 h b}\,\frac{r_0^2 - r^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow E^2(r) = \frac{r_0^2}{r^2}E_0^2 - \frac{i}{2\pi\varepsilon_0 h b}\,\frac{r_0^2 - r^2}{r^2}$$

or $E(r) < 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{E(r) = -\sqrt{\frac{r_0^2}{r^2}E_0^2 - \frac{i}{2\pi\varepsilon_0 h b}\,\frac{r_0^2 - r^2}{r^2}}}$

I.B.5) Pour r suffisamment grand (quelques centimètres en pratique), on considère généralement que le champ devient grossièrement uniforme. Quelle est alors son expression approchée ? Quelle est ici sa valeur numérique si $i/h = 0{,}70\ \mathrm{mA{\cdot}m^{-1}}$?

$$E(r) = -\sqrt{\frac{i}{2\varepsilon_0\pi h b} + \frac{1}{r^2} * (\dots)}$$

si E devient uniforme pour r suffisamment grand, c'est que le terme en $\frac{1}{r^2}$ est négligeable

$\Rightarrow \boxed{E \simeq -\sqrt{\frac{i}{2\varepsilon_0 h b \pi}}}$ AN $E \simeq -\sqrt{\frac{0{,}7.10^{-3}}{2 * 8{,}85.10^{-12} * 3{,}1.10^{-4} * \pi}}$

$$\boxed{\|E\| \simeq 0{,}2.\ \mathrm{MV.m^{-1}}}$$

I.B.6) Dans cette région de quasi-uniformité, calculer la vitesse des ions, puis la densité volumique de charge ρ et le nombre d'ions par centimètre cube au voisinage de la collectrice ($r = r_c$), en supposant que chacun porte une charge élémentaire.

$\|\vec{v}\| = b * \|\vec{E}\| = 6.10^1\ \mathrm{m/s}$

$\rho = \frac{i}{E b 2\pi r_c h} = \frac{i/h}{v\, 2\pi r_c}$ AN $\rho = \frac{0{,}7.10^{-3}}{6.10^1 * 2\pi * 150.10^{-3}} \# 10^{-5}\ \mathrm{C.m^{-3}}$

$$n_{ion} = \frac{\rho}{e} = \frac{10^{-5}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 7 \cdot 10^{13}\ m^{-3}$$

$$\boxed{n_{ion} = 7 \cdot 10^{7}\ cm^{-3}}$$

II.A.1) Calcul de la charge limite

a) Orienter par des flèches bleues les lignes de champ de la figure du document réponse et représenter le mouvement des anions par des flèches rouges. On précise que les lignes de champ qui rencontrent la sphère en la pénétrant ne portent pas d'anions : la sphère peut capturer des anions mais ne peut pas en émettre.

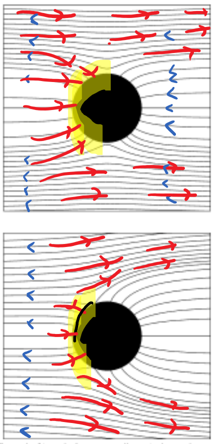


Figure A Lignes de champ autour d'un grain de poussière pour $Q = 0$ (en haut) et pour $Q < 0$ (en bas)

$$\vec{E}_t = \vec{E} + E\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\frac{a^3}{r^3}\left(2\cos\theta\,\vec{u}_r + \sin\theta\,\vec{u}_\theta\right) + \vec{E}_1$$

$\overleftarrow{E}$

anions dans le sens opposé à $\vec{E}$

b) Quelle est l'expression de $\vec{E}_1$? L'accroissement de $|Q|$ a-t-il tendance à réduire ou à élargir la portion de la sphère d'où *partent*, vers des valeurs croissantes de r, les lignes de champ ? Favorise-t-il ou s'oppose-t-il à l'arrivée de nouveaux anions sur la sphère ?

$$\vec{E}_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$ (formule obtenue par le th de Gauss à l'extérieur d'une sphère chargée)

D'après la figure A, si $|Q| \nearrow$ alors la portion d'où partent les ldc (surlignée en jaune) semble diminuer, s'opposant ainsi à l'arrivée de nouveaux anions sur la sphère

c) Le grain de poussière atteint sa charge limite $Q_{\rm lim}$ lorsque les lignes de champ sont si distordues qu'aucun anion ne peut plus lui parvenir. Montrer que

$$Q_{\rm lim} = 4\pi\varepsilon_0 a^2 E\left(1 + 2\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\right)$$

Quand Q atteint Q_{lim}, c'est en $\left(\begin{array}{l}\theta = \pi \\ r = a\end{array}\right.$ que les anions n'arrivent ~~...~~ plus à parvenir à la poussière

$$\Rightarrow \vec{E}_t(\theta = \pi) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{E} - E\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\frac{a^3}{a^3}2\vec{u}_r + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{u}_r = 0$$

or $\vec{u}_z = -\vec{u}_r$ en $\theta = \pi$

$$\Rightarrow -E - 2E\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{Q = 4\pi\varepsilon_0 a^2 E\left(1 + 2\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\right)}$$

$\varepsilon_r + 2 \qquad 4\pi\varepsilon_0 a^2$

$$\Rightarrow \boxed{Q = 4\pi\varepsilon_0 a^2 E\left(1 + 2\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\right)}$$

d) Calculer numériquement Q_{lim} pour $\varepsilon_r = 10$, $d = 2a = 2{,}0\ \mu\text{m}$, $|E| = 5{,}0 \times 10^5\ \text{V}\cdot\text{m}^{-1}$. Combien de charges élémentaires cela représente-t-il ?

AN $\quad Q_{\text{lim}} = -1{,}4 . 10^{-16}\ \text{C}$

$N_{\text{charges}} = \left|\dfrac{Q_{\text{lim}}}{e}\right| \simeq 0{,}8 . 10^3$ charges élémentaires

II.A.2) Loi horaire et durée de chargement

Le mécanisme décrit dans la question précédente est régi par la loi horaire

$$Q(t) = Q_{\text{lim}} \frac{t}{t + \tau_Q}$$

a) Sachant que τ_Q ne dépend que de ε_0, b et $|\rho|$ (où ρ est la densité volumique de charge des anions), en donner une expression par analyse dimensionnelle. Le résultat exact s'obtient en plaçant un facteur 4 au numérateur.

$$\frac{L}{T} = [v] = [b][E] \qquad \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow [\varepsilon_0] = \frac{[Q]}{[E]\, L^2} = \frac{[Q][b]}{[v]\, L^2} = \frac{[Q][b]}{L^3} T =$$

or $\quad [\rho] = \dfrac{[Q]}{L^3}$

$$\Rightarrow [\varepsilon_0] = [\rho][b]\, T \qquad \Rightarrow \text{ Posons } \boxed{\tau_Q = \frac{4\varepsilon_0}{|\rho| b}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{[\varepsilon_0]}{[\rho][b]}$$

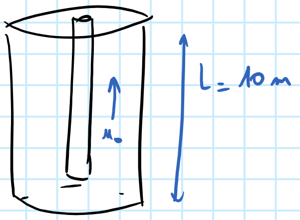
b) Calculer numériquement la durée t_{90} au bout de laquelle un grain de poussière atteint 90% de sa charge limite pour $b = 3{,}1 \times 10^{-4}\ \text{m}^2\cdot\text{V}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$ et $|\rho| = 5{,}0 \times 10^{-5}\ \text{C}\cdot\text{m}^{-3}$.

$$Q(t_{90}) = 0{,}9\, Q_{\text{lim}} \Rightarrow \frac{t}{t + \tau_Q} = 0{,}9$$

$$\Rightarrow t(1 - 0{,}9) = 0{,}9\,\tau_Q \Rightarrow \boxed{t_{90} = 9\,\tau_Q}$$

$t_{90} \simeq 21\ \text{ms}$

c) La fumée poussiéreuse s'écoule à la vitesse $u_0 = 1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ en traversant l'électrofiltre sur toute sa longueur $L = 10\ \text{m}$. Quelle conclusion peut-on tirer de la valeur numérique de t_{90} ?



le temps de séjour dans le filtre de la fumée est $\Delta t = \dfrac{L}{u_0} \simeq 10\ \text{s}$

$$\boxed{t_{90} \ll \Delta t}$$

$\Rightarrow$ les poussières atteignent quasi-instantanément leur charge limite
(régime transitoire négligeable)

II.B – Migration des particules

Cette sous-partie constitue un problème non guidé. Il est nécessaire de lui consacrer un temps suffisant. Le barème accordera des importances comparables à cette sous-partie II.B et à l'ensemble des questions II.A.1 et

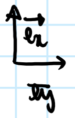
II.B – Migration des particules

Cette sous-partie constitue un problème non guidé. Il est nécessaire de lui consacrer un temps suffisant. Le barème accordera des importances comparables à cette sous-partie II.B et à l'ensemble des questions II.A.1 et II.A.2.

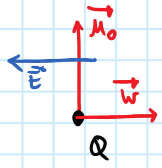
Dans cette question on suppose que la particule a atteint sa charge limite Q_{lim} qui reste dès lors constante et qu'on pourra simplement noter Q. Elle est transportée par la fumée de température $T = 150$ °C qui s'écoule, dans le cas de l'électrofiltre sec, à la vitesse $\vec{u}_0 = u_0\,\vec{e}_x$ et soumise au champ électrique $\vec{E} = E\,\vec{e}_y$ supposé constant et uniforme.

On note $\vec{w}$ la vitesse de la particule dans le référentiel lié au fluide en mouvement. Dans le référentiel lié aux électrodes, sa vitesse est $\vec{u}_0 + \vec{w}$.

Déterminer la vitesse limite $\vec{w}_{\mathrm{lim}}$ de la particule et un ordre de grandeur du temps qu'il faut pour s'en approcher. Préciser les valeurs numériques pour des cendres volantes de masse volumique $\mu = 2{,}6 \times 10^3$ kg·m^{-3} avec les valeurs de la question II.A.1d. D'autres informations utiles se trouvent en annexe.



$\vec{E} = E\,\vec{e_y}$. suppose $E<0$, $Q<0$ comme précédemment



– système {charge Q}

– référentiel du fluide à la vitesse $\vec{u_0}$ galiléen car en translation rectiligne unif par rapport au référentiel terrestre.

PFD : $\sum \vec{F_{ext}} = m\dfrac{d\vec{w}}{dt} = \vec{0}$ quand $\vec{w} = \vec{w_{lim}}$

/ sur $\vec{e_y}$

· si on ne considère que $\vec{F_{elec}} = Q\vec{E}$, on n'atteindra jamais de vitesse limite (car $\frac{d\vec{w}}{dt}$ sera cste)

⇒ une force doit s'opposer : frott^t. (dans les données, on a le coefficient de viscosité de l'air ainsi que le C_x de la sphère)

$$\|\vec{T}\| = \frac{1}{2}\rho_a C_x \underbrace{S}_{\pi a^2} w^2$$

Estimons Re au niveau de la particule pour évaluer C_x

$$R_e = \frac{\rho_a * 2a * w}{\eta_a}$$ Pb w_{lim} non connue

Faisons l'hypothèse que l'on se situe en régime laminaire ($R_e < 1$)

$$\Rightarrow C_x = \frac{24}{R_e} = \frac{12\,\eta_a}{a\rho_a\, w}$$

$$\Rightarrow \|\vec{T}\| = 6\eta_a * \frac{\pi a^2}{a} w_{lim} = QE \quad \text{en RP}$$

(on retrouve la formule de Stokes)

$$\Rightarrow \boxed{w_{lim} = \frac{QE}{6\pi\eta_a a} = 0{,}16 \text{ m/s}}$$

⇒ $R_e = 10^{-2}$

⇒ COHERENT avec l'hypothèse effectuée.

Temps caractéristique : PFD projeté sur $\vec{e_y}$

$$QE - 6\pi\eta_a a\, w = m\frac{dw}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dw}{dt} + \frac{6\pi\eta_a a}{m} w = \frac{QE}{m}$$

$$\boxed{\tau = \frac{m}{6\pi\eta_a a} = \frac{4/3\,\pi a^3 \mu}{6\pi\eta_a a} = \frac{2\mu a^2}{9\eta_a}}$$

AN τ 2.10^{-5} s

AN $\tau = 2.10^{-5}\,s$

II.C – Rendement de l'électrofiltre

Dans la suite on suppose que toutes les particules possèdent la vitesse $\vec{w}_{\text{lim}}$ que l'on notera simplement $\vec{w}$. On définit le rendement d'un électrofiltre par

$$\eta = 1 - \frac{c_2}{c_1}$$

c_1 et c_2 désignant respectivement les densités volumiques des poussières (en particules par mètre cube) à l'entrée et à la sortie de la machine. Le caractère turbulent de l'écoulement du gaz rend sa détermination délicate : contrairement à la description donnée en II.B, $\vec{u}_0$ n'est pas uniforme mais présente des fluctuations à petite échelle, sauf dans la couche limite près des collectrices où la vitesse du gaz devient plus faible. La trajectoire des poussières est donc aléatoire.

II.C.1) Justifier le caractère turbulent de l'écoulement de la fumée en utilisant l'ordre de grandeur de valeurs déjà fournies.

* l'échelle de l'écoulement $Re_2 \simeq \dfrac{\rho_a * 2s * u_0}{\eta_a} \# 10^4$

ce qui justifie le caractère turbulent de l'écoulement.

II.C.2) Modèle de Deutsch

Pour déterminer théoriquement η, on considère la géométrie plane de l'électrofiltre sec (figure 4) et on adopte le modèle de Deutsch fondé sur les hypothèses suivantes :

i. grâce au brassage turbulent du gaz, la densité volumique c des poussières ne dépend que de x. Elle est aussi invariable dans le temps ;
ii. malgré les turbulences, on peut définir une vitesse moyenne d'écoulement du gaz $\vec{u}_0$ orientée selon $\vec{e}_x$;
iii. dans la couche limite près des collectrices, les particules possèdent une vitesse dont la composante orthogonale à la collectrice est w. Elles seules peuvent atteindre les collectrices.

Pour déterminer $c(x)$, on procède à un bilan de matière pour une tranche de fluide Σ située à l'instant t entre les abscisses x et $x + \Delta x$ (figure 4). Pendant une durée infinitésimale dt, ses deux faces avancent de $u_0\,dt$. On note P la longueur totale des collectrices, perpendiculairement au plan de la figure, le long de laquelle s'effectue la capture des particules, et A l'aire de la section au travers de laquelle s'écoule le gaz. Pour un électrofiltre sec, $A = 2sh$ et $P = 2h$ car la précipitation s'effectue sur les deux plaques.

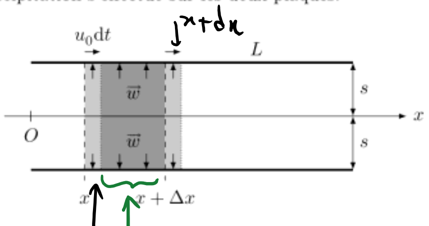


Figure 4

a) Soit $N(t)$ le nombre de particules que contient la tranche. Pendant le déplacement envisagé, il varie de dN. Exprimer dN en fonction de $c(x)$, $c(x + \Delta x)$, A, u_0 et dt.

$N(t) = N_{\text{commun}}(t) + \delta N(x)$

$N(t+dt) = \underbrace{N_{\text{commun}}(t+dt)}_{= N_{\text{commun}}(t) \text{ en RP}} + \delta N(x+\Delta x)$

$\Rightarrow dN = N(t+dt) - N(t) = \delta N(x+\Delta x) - \delta N(x)$

$= c(x+\Delta x) * \underbrace{u_0\, dt * A}_{\delta V(x+dx)} - c(x) * \underbrace{u_0\, dt * A}_{\delta V(x)}$

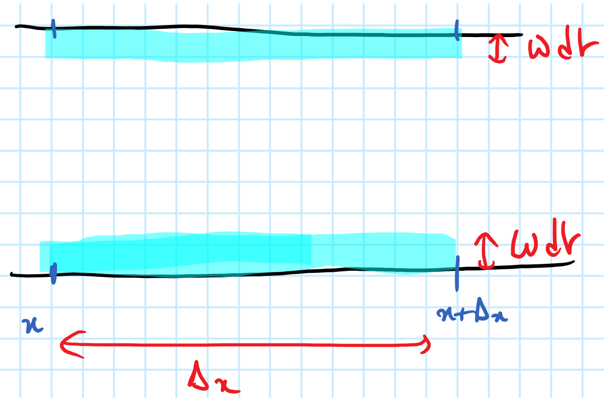
$\boxed{dN = A\, u_0\, dt\, \big(c(x+\Delta x) - c(x)\big)}$

b) Dans quel volume se trouvent les particules de Σ qui atteignent la surface collectrice pendant dt ? Quel est leur nombre ?

dans le volume

$\delta V_{\text{coll}} = 2 * (\Delta x * w\,dt * h)$

$w\,dt$



$$\boxed{\delta V_{coll} = P\,\Delta x\, w\, dt}$$

leur nombre est $\delta N_{coll} = c(x)\,\delta V_{coll}$

$$\rightarrow \boxed{\delta N_{coll} = c(x)\, P\,\Delta x\, w\, dt}$$

c) En déduire que $\dfrac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{Pw}{Au_0}c(x)$.

Le bilan de particules indique que

$$dN = -\delta N_{coll}$$

$$A u_0\, dt\,\big(c(x+\Delta x) - c(x)\big) = -c(x)\, P\,\Delta x\, w\, dt$$

TAYLOR

$$A u_0 \frac{\partial c}{\partial x} \cancel{\Delta x}\, \cancel{dt} = -c(x)\, P \cancel{\Delta x}\, w\, \cancel{dt}$$

$c = c(x)$

$$\boxed{\frac{dc}{dx} = -\frac{Pw}{Au_0}\, c(x)} \qquad (*)$$

d) Exprimer enfin l'efficacité en fonction de L, u_0, w et s. La calculer numériquement pour $u_0 = 1{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $L = 10\ \mathrm{m}$, $w = 0{,}15\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ et $s = 150\ \mathrm{mm}$.

Posons $\underline{\delta = \dfrac{Au_0}{Pw}} = \dfrac{s u_0}{w}$

L'équation $(*)$ donne $\boxed{c(x) = c_1 \exp(-x/\delta)}$

$$\Rightarrow c_2 = c(L) = c_1 \exp(-L/\delta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta = 1 - \frac{c_2}{c_1} = 1 - \exp(-L/\delta) = 1 - \exp\left(-\frac{Lw}{s u_0}\right)}$$

On trouve $\eta = 1$

II.C.3) De la théorie à la pratique

a) Pour les très petites particules ($d \lesssim 1\mu\mathrm{m}$), le calcul de w doit être corrigé. Sachant que le libre parcours moyen des molécules d'air est, dans les conditions envisagées, de l'ordre de 10^{-7} m, indiquer quel concept fondamental de la mécanique des fluides est mis en défaut dans l'étude de la sous-partie II.B.

A l'échelle des particules, l'air ne peut plus être vu comme un milieu continu à l'échelle mésoscopique.

b) En prenant en compte divers autres facteurs correctifs, on obtient finalement les variations de w en fonction de d représentées sur la figure 5.

Expliquer pourquoi le modèle de Deutsch, qui se prête bien à des études en laboratoire sur des poussières calibrées, ne peut pas s'appliquer simplement pour calculer l'efficacité d'un électrofiltre traitant la fumée issue d'une installation industrielle.

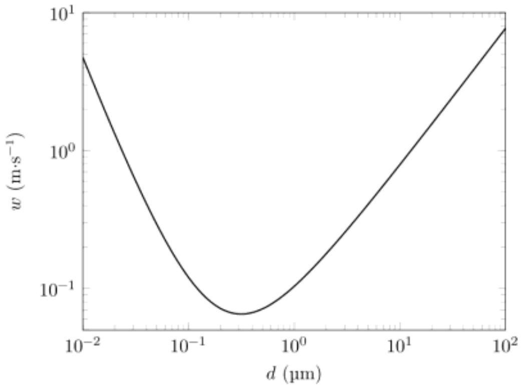


Figure 5 Variation de la vitesse de migration w en fonction du diamètre d des poussières

On peut imaginer qu'une fumée industrielle est constituée d'une diversité de particules de diamètres ≠, contrairement à une fumée « de laboratoire » où ce diamètre peut être unique & contrôlé lors de la préparation de la fumée.

⇒ en cas industriel, w n'est pas unique d'après fig 5.

⇒ le modèle de Deutsch est moins adapté.

c) En pratique, l'efficacité d'un électrofiltre est calculée par la relation empirique de Matts et Ohnfeld

$$\eta = 1 - \exp\left(-\left(\frac{w' A_c}{D_v}\right)^k\right)$$

où D_v représente le débit volumique de gaz traversant l'électrofiltre et A_c l'aire des électrodes collectrices. Le paramètre sans dimension k et la grandeur w', nommée vitesse effective de migration, doivent être déterminés expérimentalement. Justifier que l'on retrouve le résultat de Deutsch en prenant $k = 1$. Que vaudrait alors w' ?

$k=1 \Rightarrow \eta = 1 - \exp\left(-\frac{w' A_c}{D_v}\right)$

or $\eta_{Deutsch} = 1 - \exp\left(\frac{-wL}{\delta u_0}\right)$ or débit vol $= 2\delta h u_0$

$= 1 - \exp\left(-\frac{w \overbrace{L \times 2h}^{A_c}}{D_v}\right) = \eta$

On retrouve le résultat avec $\underline{w' = w}$

d) Pour des cendres volantes, un industriel a tabulé $w' = 0{,}12$ m·s^{-1} et $k = 0{,}5$. Calculer le rendement de l'électrofiltre en reprenant les valeurs de la fin de la question II.C.2.

$A_c = 2Lh$

$D_v = 2\delta h u_0$

$\Rightarrow \frac{A_c}{D_v} = \frac{L}{\delta u_0}$; $L \to 10$ m ; $\delta \to 0{,}15$ m ; $u_0 \to 1{,}0$ m/s

$\Rightarrow \underline{\eta \simeq 94\,\%}$

III Alimentation électrique d'un électrofiltre

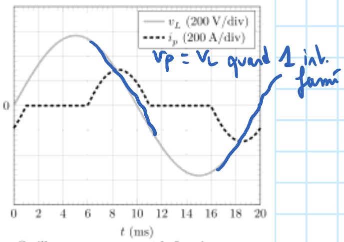
III.A – Armoire de régulation

L'armoire de régulation comporte des commutateurs K_1 et K_2 assimilables à des interrupteurs idéaux et qui permettent de piloter la puissance transférée du réseau EDF vers l'électrofiltre. La partie droite de la figure 6 montre l'évolution de la tension de réseau v_L et de l'intensité i_p sur une période ($T = 20\,\text{ms}$). Le fonctionnement met en jeu un rapport cyclique α, toujours inférieur à 1/2 et ici fixé à 0,3.

– L'interrupteur K_1, qui se trouve ouvert à $t = 0$, est fermé à $t = \alpha T$ durant une phase où $v_L > v_p$. Il reste fermé quelques instants, puis s'ouvre spontanément dès que i_p s'annule et demeure ouvert jusqu'à la période suivante.

– L'interrupteur K_2, qui se trouve ouvert à $t = T/2$, est fermé à $t = T/2 + \alpha T$, durant une phase où $v_L < v_p$. Il reste fermé quelques instants, puis s'ouvre spontanément dès que i_p s'annule et demeure ouvert jusqu'à la période suivante.

III.A.1) Dans quel interrupteur le courant circule-t-il pour $t \in [6\,\text{ms}, 11\,\text{ms}]$ et pour $t \in [16\,\text{ms}, 21\,\text{ms}]$?

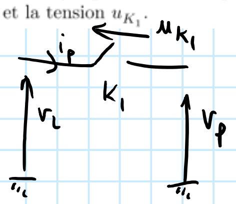


Oscillogrammes montrant le fonctionnement de la régulation

$t \in [6\,\text{ms}, 11\,\text{ms}] \Rightarrow$ interrupteur K_1

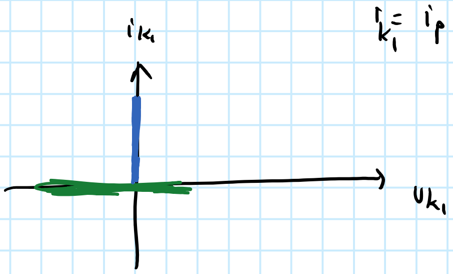
$t \in [16\,\text{ms}, 21\,\text{ms}] \Rightarrow$ K_2

III.A.2) Les interrupteurs K_1 et K_2 fonctionnent de manière symétrique et on se concentre sur K_1. Représenter schématiquement sur une caractéristique, sans s'attarder sur les valeurs numériques, les points de fonctionnement mis en jeu pour cet interrupteur en convention récepteur. Préciser par un schéma l'orientation de l'intensité i_{K_1} et la tension u_{K_1}.



quand K_1 fermé : $u_{K_1} = 0$

$i_{K_1} = i_p > 0$

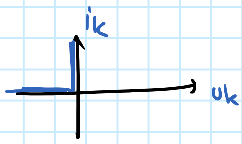


quand K_1 ouvert $\Rightarrow$ $i_{K_1} = 0$

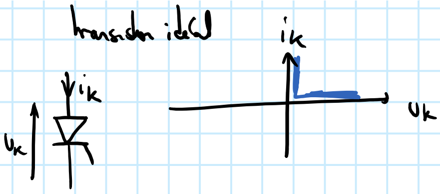
$u_{K_1} = v_L - v_p < 0$ puis > 0 (cf fig du schéma précédent)

III.A.3) Rappeler les caractéristiques courant-tension idéales d'une diode et d'un transistor utilisés en régime de commutation, en précisant à nouveau les orientations par des schémas. L'un de ces deux composants peut-il être utilisé pour K_1 et K_2 ? Justifier.

diode idéale



transistor idéal



A priori, K_1 (et K_2) ne peuvent être simplt un transistor ou une diode car la caractéristique attendue à la question précédente est plus complexe.

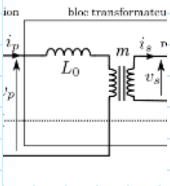
III.B – Le transformateur

Le transformateur, de rapport de transformation m, est supposé idéal. On néglige en particulier le courant de magnétisation. Il est précédé d'une bobine de protection d'auto-inductance L_0 immergée dans la même cuve d'huile. La plaque signalétique de l'installation comporte les informations suivantes, issues d'essais en régime sinusoïdal forcé de fréquence 50 Hz :

- tension efficace nominale d'alimentation du circuit primaire $V_{pne} = 400$ V,
- intensité efficace nominale du circuit secondaire $I_{sne} = 1400$ mA,
- amplitude nominale de la tension au secondaire $V_{sn} = 90$ kV, valeur obtenue en circuit secondaire ouvert et sous la tension primaire nominale.

On précise que, dans ces essais, le transformateur est déconnecté du reste de l'installation et que la tension v_p est appliquée à l'ensemble formé de L_0 et du circuit primaire, comme sur la figure 6.

III.B.1) Que vaut le rapport de transformation m ? En déduire l'intensité nominale efficace au primaire I_{pne}.



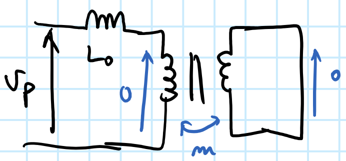
$$\boxed{m = \frac{V_{sn}}{V_{pne}^{*}} = 2,3.10^2}$$

* le secondaire étant ouvert ⇒ $i_s = 0$ ⇒ $i_p = 0$
⇒ la tension aux bornes de L_0 est nulle et on peut confondre v_p et tension du primaire.

or $m = \frac{I_{pne}}{I_{sne}}$ ⇒ $\boxed{I_{pne} = m\, I_{sne} = 0,32\,kA}$

III.B.2) L'inductance de protection est caractérisée par un nombre sans dimension r_{cc} exprimé en pourcent et défini comme suit. Lorsque le secondaire est en court-circuit, il faut appliquer au primaire une tension v_p de valeur efficace V_{pcc} pour y faire passer un courant d'intensité efficace égale à sa valeur nominale I_{pne}. On pose $r_{cc} = V_{pcc}/V_{pne}$.

Justifier que $L_0 = \dfrac{r_{cc}V_{pne}}{\omega I_{pne}}$.

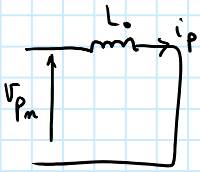


$v_p = L_0 \frac{di_p}{dt} + \cancel{v_{primaire}}$ $\quad \frac{v_{secondaire}}{m} = 0$ car secondaire en court-circuit

$V_{pcc} = L_0 \omega I_{pne}$

⇒ $\boxed{L_0 = \frac{V_{pcc}}{\omega I_{pne}} = \frac{r_{cc} V_{pne}}{\omega I_{pne}}}$

III.B.3) L'inductance de protection L_0 trouve son utilité en cas d'apparition d'arcs électriques dans l'électrofiltre, qui provoquent des surintensités dommageables. On représente cette situation par un court-circuit du secondaire alors que v_p est maintenu à la tension d'alimentation nominale. Quelle valeur convient-il de donner à r_{cc} pour que l'intensité dans le primaire ne dépasse pas 3 fois sa valeur nominale ? Calculer numériquement L_0.



$V_{pne} = L_0 \omega I_p$

on veut $I_{p\,lim} = 3 I_{pne}$

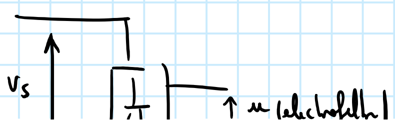
$V_{pne} = 3 L_0 \omega I_{pne}$ $\quad$ or $L_0 = \frac{r_{cc} V_{pne}}{\omega I_{pne}}$

⇒ $1 = 3 r_{cc}$ ⇒ $\boxed{r_{cc} = 1/3}$

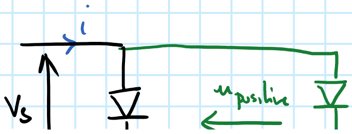
$L_0 = \frac{1/3 * 400}{2\pi * 50 * 0,32.10^3} = 1,4\,mH$

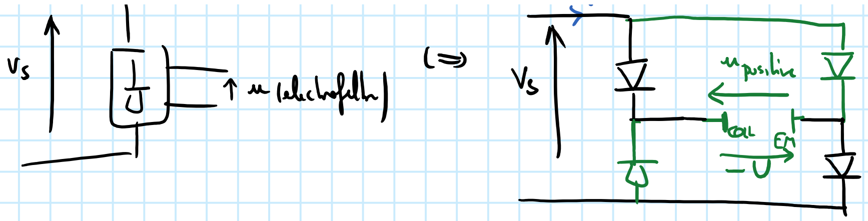
III.C – Le redresseur

III.C.1) Le redressement double alternance est réalisé au moyen d'un pont de diodes au silicium. Représenter par un schéma la structure de ce dispositif. Faire apparaître clairement les points où s'applique la tension v_s fournie par le transformateur, de même que les bornes où il convient de brancher l'électrode émettrice et l'électrode réceptrice, dont la polarité a été indiquée au début du problème.



⇔





Filtrer "u" avant de l'envoyer sur les électrodes
(pour récupérer valeur moyenne ?)

III.C.2) Durant les phases où l'intensité i_p est non nulle, les électrodes se chargent comme les plaques d'un condensateur, puis se déchargent partiellement lorsque cette intensité disparait. *Qualitativement*, si α augmente tout en restant inférieur à 1/2, dans quel sens la tension moyenne U aux bornes de l'électrofiltre évolue-t-elle ? Si les arcs électriques sont trop nombreux, convient-il d'augmenter ou d'abaisser la valeur de α ?

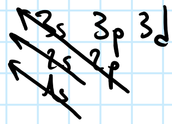
- si $\alpha \nearrow$, les interrupteurs sont moins longtemps fermés
  - $\Rightarrow$ les courants circulent durant des durées plus faibles
  - $\Rightarrow$ moins de charge des électrodes (qui fonctionnent comme un condensateur)
  - $\Rightarrow$ $U \searrow$
- si les arcs sont trop nombreux, c'est que U est trop élevé $\Rightarrow$ $\nearrow \alpha$

IV Conditionnement des gaz par adjonction d'oxyde de soufre

IV.A –

IV.A.1) Déterminer la configuration électronique du soufre et en déduire son nombre d'électrons de valence. Sous quel élément se situe-t-il dans la classification périodique des éléments ?

S : $Z = 16$



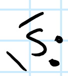
$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^4$

$6\ e^-$ de valence

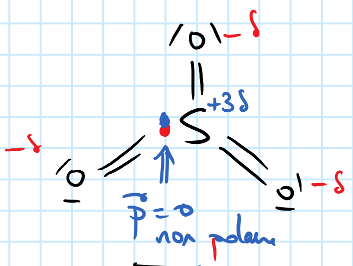
$\Rightarrow$ en dessous de l'oxygène $\overline{O}$

IV.A.2) Proposer des structures de Lewis pour les espèces SO_2 et SO_3. Sachant que l'une est coudée et l'autre triangulaire plane, déterminer si ces molécules sont polaires et représenter le vecteur moment dipolaire sur la structure de Lewis.

S peut être hypervalent

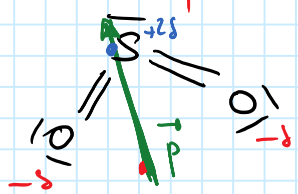


SO_3



TRIANG PLANE

SO_2



COUDÉE

POLAIRE

O plus électronégatif que S

IV.B – L'acide sulfureux $H_2SO_{3\,(aq)}$ et l'acide sulfurique $H_2SO_{4\,(aq)}$ sont respectivement les formes hydratées de $SO_{2\,(g)}$ et $SO_{3\,(g)}$.

IV.B.1) Expliquer pourquoi, dans un électro-filtre, on utilise $SO_{3\,(g)}$ et non $SO_{2\,(g)}$ pour diminuer la résistivité des particules solides en milieu humide. On pourra écrire les réactions de ces deux molécules avec l'eau adsorbée sur les particules solides.

$$SO_2 + H_2O \rightleftharpoons H_2SO_{3(aq)}$$
$$SO_3 + H_2O \rightleftharpoons H_2SO_{4(aq)}$$

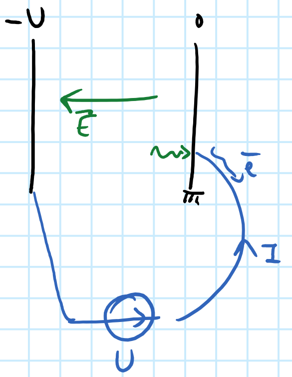
or H_2SO_4 est un acide fort ($pK_a < 0$)
H_2SO_3 faible

$\Rightarrow$ H_2SO_4 va se dissocier davantage que H_2SO_3 pour former H_3O^+ et HSO_4^-

$\Rightarrow$ $\nearrow$ [ions] $\Rightarrow$ $\searrow$ résistivité

IV.B.2) Si une trop forte résistivité des particules est à éviter pour les raisons évoquées plus haut, le rendement de dépoussiérage chute aussi si la résistivité est trop faible. On constate que les particules ont tendance à se ré-envoler lorsqu'elles atteignent la collectrice. Quelle(s) explication(s) pouvez-vous proposer ?

Lorsque les ions arrivent sur l'électrode, il faut y avoir une $\frac{1}{2}$ réaction redox sur l'électrode



qui semble ici être une oxydation

$H_2O \longrightarrow O_{2(g)}$?

$\Rightarrow$ décollement des particules à teneur en eau trop élevée ?