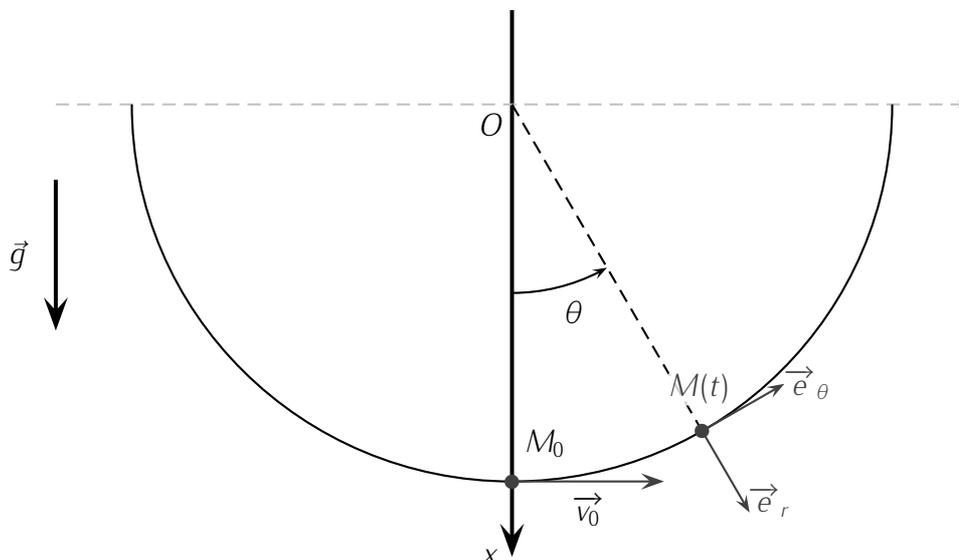


## MOUVEMENT PENDULAIRE AMORTI

Un petit objet assimilé à un point matériel  $M$ , de masse  $m$ , peut glisser sans frottement le long d'un rail ayant la forme d'un demi-cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ , placé dans un plan vertical.



On repère la position du point  $M$  à l'instant  $t$  par l'angle  $\theta(t) = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM}(t))$ .

À l'instant  $t = 0$ , l'objet est lancé du point  $M_0$  avec une vitesse  $\vec{v}_0$ .

Dans tout le problème, on utilisera une base de projection polaire  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ . On prendra pour valeur de l'accélération de la pesanteur  $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

- Q1 1. Faire l'inventaire des forces appliquées à  $M$ , et les représenter sur un schéma clair lorsque le point est dans une position  $M(t)$  quelconque. On précisera les composantes de ces forces sur la base polaire.
- Q2 2. Exprimer l'accélération de  $M$  dans la base polaire. Justifier.
- Q3 3. En déduire l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction  $\theta(t)$ .
- Q4 4. On suppose que la norme  $v_0$  du vecteur vitesse initial est suffisamment faible pour que la condition  $\theta(t) \ll 1 \text{ rad}$  soit satisfaite à chaque instant. Déterminer complètement l'expression de  $\theta(t)$  dans cette hypothèse en fonction de  $v_0, g, R$  et  $t$ .

On suppose à partir de maintenant que le point  $M$  subit au cours de son mouvement une force de frottement fluide  $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$ , où  $\lambda$  est une constante positive et  $\vec{v}$  le vecteur vitesse du point  $M$  à l'instant  $t$ . La condition  $\theta(t) \ll 1 \text{ rad}$  reste également satisfaite à chaque instant.

- Q5 5. Établir la nouvelle équation différentielle satisfaite par la fonction  $\theta(t)$ .
- Q6 6. Les grandeurs  $m, g$  et  $R$  étant fixées, donner la condition portant sur  $\lambda$  pour que le mouvement soit pseudo-périodique.
- Q7 7. Cette condition étant réalisée, exprimer  $\theta(t)$  sous la forme :

$$\theta(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \sin(\Omega t)$$

On justifiera soigneusement l'établissement de cette relation et on exprimera  $A, \tau$  et  $\Omega$  en fonction de  $v_0, m, g, R$  et  $\lambda$ .

## ÉTUDE D'UN CIRCUIT ÉLECTRIQUE RLC

Un générateur sinusoïdal alimente un circuit RLC constitué d'un condensateur de capacité  $C = 0.1 \mu\text{F}$ , d'une bobine réelle d'auto-inductance  $L$  et de résistance  $r$  inconnues, placés en série avec une résistance  $R = 480 \Omega$ .

Le générateur est un générateur basse fréquence de résistance interne  $R_g = 50 \Omega$  délivrant un signal sinusoïdal  $e(t)$  de pulsation  $\omega$  et d'amplitude  $E$ ,  $e(t) = E \cos(\omega t)$ .

À toute grandeur réelle  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$  est associée une grandeur complexe que l'on notera  $\underline{u}(t) = U_m \exp(j\omega t + j\varphi) = \underline{U} \exp(j\omega t)$ ,  $j^2 = -1$  et  $\underline{U} = U_m \exp(j\varphi)$  est l'amplitude complexe.

L'intensité circulant dans le circuit est  $i(t) = I \cos(\omega t + \phi)$ . Le montage est donné ci-dessous.

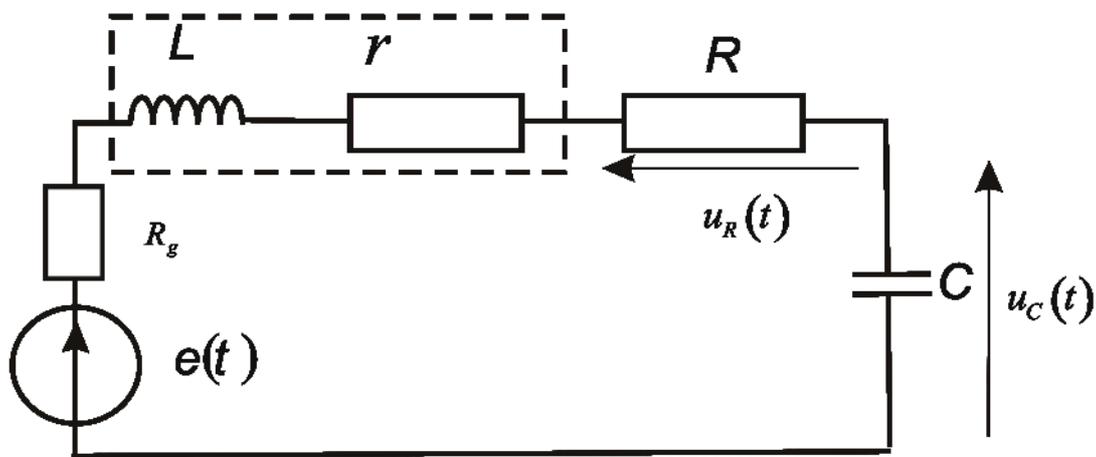


FIGURE 1 – Circuit étudié

### A. Étude de la tension aux bornes du condensateur

- Q8 1. Rappeler les expressions des impédances complexes de la bobine, du résistor et du condensateur puis déterminer l'impédance complexe  $\underline{Z}$  du circuit.
- Q9 2. Préciser le comportement limite de ces différents composants à haute et basse fréquence. En déduire qualitativement le comportement de la tension  $u_c(t)$  aux bornes du condensateur à haute et basse fréquences.
- Q10 3. Exprimer l'amplitude complexe  $\underline{U}_c$  associée à la tension aux bornes du condensateur en fonction des caractéristiques des composants puis sous la forme canonique :

$$\underline{U}_c = \frac{A}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Exprimer  $A$ ,  $\omega_0$  et  $Q$  en fonction des données du problème.

- Q11 4. En déduire l'expression de l'amplitude de la tension aux bornes du condensateur  $U_{ce}$  en fonction de  $\omega$ ,  $Q$ ,  $\omega_0$  et  $E$  puis en fonction de  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ ,  $Q$  et  $E$ .
- Q12 5. Montrer que la tension  $U_{ce}(x)$  passe par un extremum en  $x_r$  si  $Q \geq Q_{min}$ . Préciser  $x_r$  et  $Q_{min}$ . En déduire la pulsation  $\omega_r$  de résonance. La comparer à  $\omega_0$ .
- Q13 6. Exprimer  $U_{ce}(\omega = \omega_0)$  en fonction de  $Q$  et  $E$ .
- Q14 7. Tracer l'allure de  $U_{ce}(\omega)$  pour les valeurs de  $Q = 0,1$ ,  $Q = 1$  et  $Q = 10$ .

## B. Étude de l'intensité

- Q15 1. Déterminer l'impédance  $\underline{Z}$  du circuit et l'écrire sous la forme :

$$\underline{Z} = R_0 \left( 1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)$$

Préciser  $R_0$  en fonction de autres résistances du circuit.

- Q16 2. Exprimer l'amplitude complexe  $\underline{I}$  associée à l'intensité du courant traversant le circuit en fonction de  $R_0$ ,  $\omega$ ,  $Q$ ,  $\omega_0$  et  $E$ .

- Q17 3. En déduire que l'amplitude de l'intensité  $I_e(\omega)$  peut se mettre sous la forme

$$I_e(\omega) = \frac{A'}{\sqrt{1 + B^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

Préciser  $A'$  et  $B$  en fonction de  $Q$ ,  $E$  et  $R_0$ .

- Q18 4. Montrer que  $I_e(\omega)$  présente un extremum pour  $\omega = \omega_r'$ . Préciser  $\omega_r'$  et  $I_{max} = I_e(\omega_r')$ .

- Q19 5. Définir la bande passante. Montrer que la largeur de la bande passante en pulsation est  $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ .

Par la suite, on pourra utiliser cette relation même si la démonstration n'a pas été faite.

6. On donne ci-dessous les graphes de  $I_e(f)$  et  $U_{ce}(f)$  où  $f$  est la fréquence du générateur. L'échelle de gauche est celle de  $U_{ce}$ , celle de droite est celle de  $I_e(f)$ .

- Q20 Identifier, en justifiant votre choix, les courbes  $I_e(f)$  et  $U_{ce}(f)$  parmi les courbes (1) et (2).

- Q21 7. Déterminer à partir de ces courbes : l'amplitude de la tension du générateur  $E$ , la fréquence propre  $f_0$  et le facteur de qualité  $Q$  du circuit, les limites de la bande passante et  $I_{max}$ .

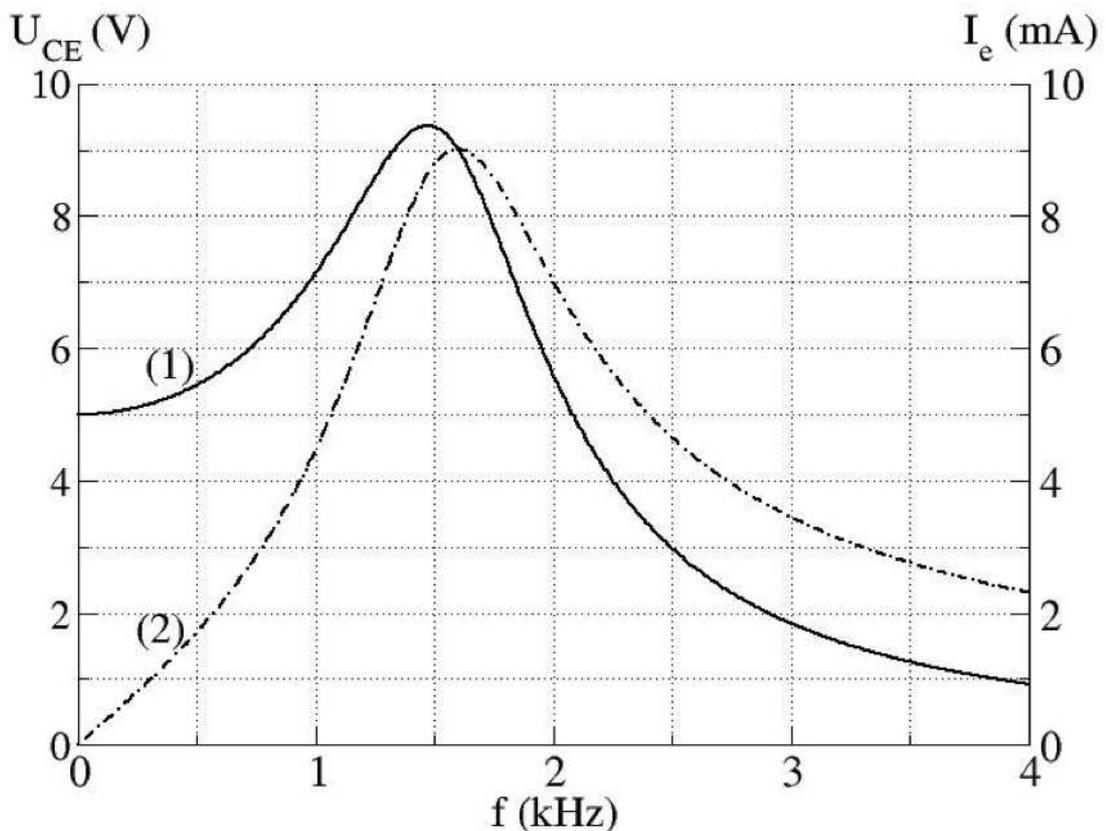


FIGURE 2 –  $I_e$  et  $U_{ce}$  en fonction de la fréquence du générateur.

- Q22 8. En déduire les valeurs de  $r$  et de  $L$ .

### C. Utilisation d'une autre bobine

Dans les questions qui suivent, on utilise une bobine différente dont les valeurs caractéristiques dont  $L'$  et  $r'$ .

- Q23 1. Exprimer le déphasage  $\phi$  entre  $i(t)$  et  $e(t)$  ainsi que  $\varphi'$  le déphasage entre  $u_c(t)$  et  $e(t)$ . Préciser  $\phi(\omega_0)$  ainsi que  $\varphi'(\omega_0)$ .
- Q24 2. Comment peut-on accéder expérimentalement à la mesure de  $i(t)$  avec un oscilloscope? Faire un schéma électrique du montage et représenter les branchements de l'oscilloscope.
3. À l'aide d'un oscilloscope, on mesure la tension  $e(t)$  sur la voie CH1 et la tension  $U_R(t)$  aux bornes de la résistance  $R$  sur la voie CH2. On fait varier la fréquence du générateur sinusoïdal et on constate que la voie CH2 passe par un maximum.
- Q25 Interpréter la présence de ce maximum aux bornes de  $R$ .
- On se place désormais à cette fréquence.**
- On mesure maintenant sur la voie CH2 la tension  $u_c(t)$  aux bornes du condensateur  $C$  en gardant  $e(t)$  sur la voie CH1.
4. Les deux oscillogrammes suivants ont été enregistrés l'un pour la voie CH2 aux bornes de  $C$ , l'autre pour la voie CH2 aux bornes de  $R$ .
- Q26 (a) Déterminer le déphasage entre la voie CH1 et la voie CH2 pour chacun des oscillogrammes.
- Q27 (b) Préciser, en justifiant votre choix, à quel composant correspond chacun des oscillogrammes.

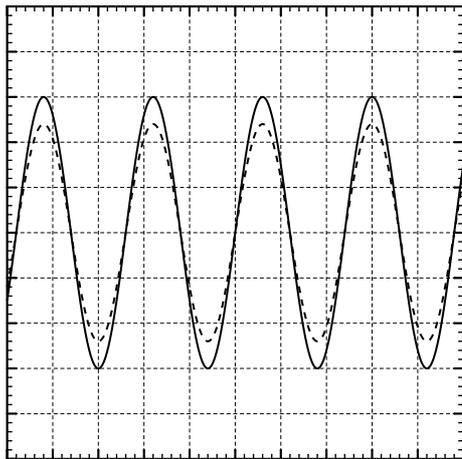


FIGURE 3 – Oscillogramme (a) :  
voie CH1 en traits pleins (2V/div);  
voie CH2 en pointillés (2V/div).  
Calibre temporel : 0,5 ms/div.

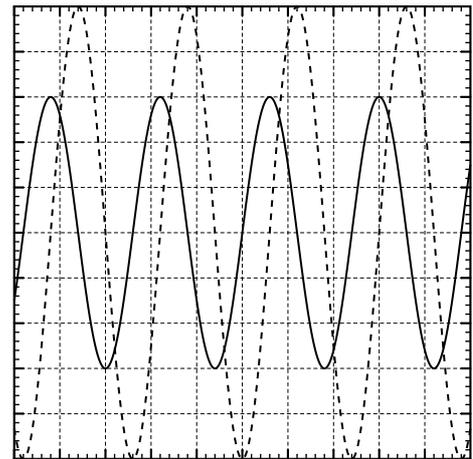


FIGURE 4 – Oscillogramme (b) :  
voie CH1 en traits pleins (2V/div);  
voie CH2 en pointillés (4V/div).  
Calibre temporel : 0,5 ms/div.

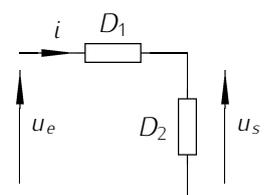
- Q28 5. En déduire les valeurs  $L'$  et  $r'$  de la nouvelle bobine.

### EXERCICE BONUS : À NE TRAITER QUE SI TOUT EST FAIT

Un quadripôle est constitué d'une résistance, d'une inductance et d'une capacité. Ces trois composants sont répartis de manière inconnue entre  $D_1$  et  $D_2$ .

Si on alimente le circuit avec une tension continue  $E = 15 \text{ V}$ , on mesure  $i = 15 \text{ mA}$ . Si on alimente le circuit avec une tension sinusoïdale, on s'aperçoit qu'il s'agit d'un filtre passe-bande de fréquence de résonance  $f_0 = 1,16 \text{ kHz}$  et de bande passante à  $-3 \text{ dB}$  de  $0,34 \text{ kHz}$ .

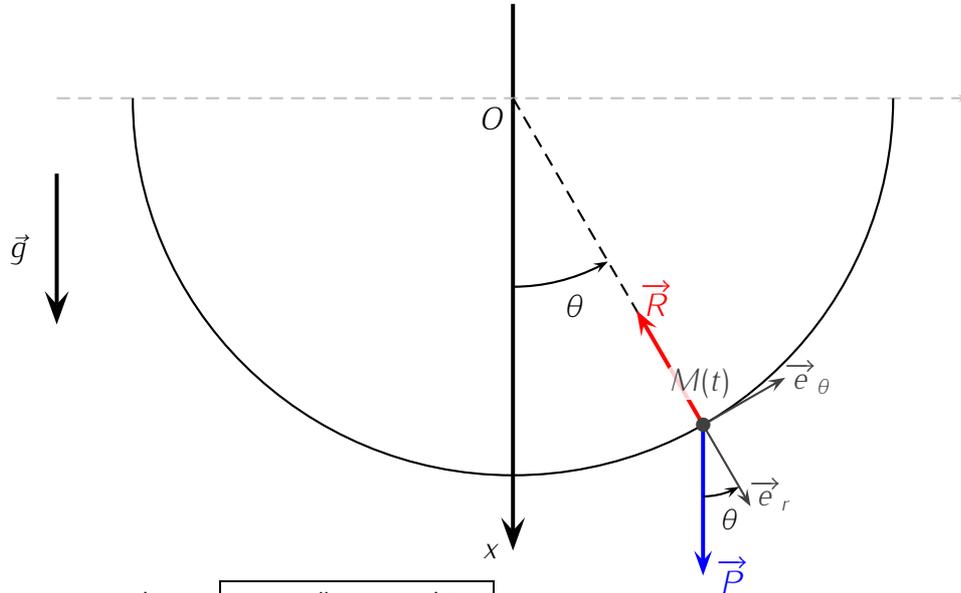
Déterminer la structure complète du circuit et les valeurs numériques de  $R$ ,  $L$  et  $C$ .



## MOUVEMENT PENDULAIRE AMORTI

Q29 1. Système : point  $M$ . Référentiel :  $\mathcal{R}_T$  terrestre supposé galiléen.

Forces : son poids  $\vec{P} = m\vec{g} = mg \cos(\theta)\vec{e}_r - mg \sin(\theta)\vec{e}_\theta$ ; la réaction normale du support (car pas de frottements)  $\vec{R} = N\vec{e}_r$ .



Q30 2.  $\vec{OM} = R\vec{e}_r$ ;  $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ ;  $\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$

3. Appliquons la deuxième loi de Newton à l'objet dans  $\mathcal{R}_T$  :  $m\vec{a} = \vec{T} + \vec{P}$ .

Q31 Soit en projection selon  $\vec{e}_\theta$  :  $mR\ddot{\theta} = -mg \sin \theta + 0$  d'où  $\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta = 0$ . (Remarque, une méthode énergétique fonctionne aussi).

4. Pour des angles faibles (cad  $\theta(t) \ll 1$ ), on fait l'approximation :  $\sin \theta \simeq \theta$  d'où  $\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \theta = 0$ .

Le mouvement est celui d'un oscillateur harmonique de pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$ , la solution est de la forme  $\theta(t) = A \cos(\sqrt{\frac{g}{R}}t) + B \sin(\sqrt{\frac{g}{R}}t)$ .

Q32 Or  $\theta(t=0) = 0 = A$  et  $\dot{\theta}(t=0) = \frac{v_0}{R} = B\sqrt{\frac{g}{R}}$  d'où  $B = \frac{v_0}{\sqrt{gR}}$ . D'où  $\theta(t) = \frac{v_0}{\sqrt{gR}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right)$

Q33 5. On ajoute la force de frottements  $\vec{f} = -\lambda R \dot{\theta} \vec{e}_\theta$  dans le bilan des forces. Appliquons la deuxième loi de Newton à l'objet dans le référentiel d'étude :  $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f}$ , soit en projection selon  $\vec{e}_\theta$  :  $mR\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - \lambda R \dot{\theta}$ , d'où pour  $\theta \ll 1$ ,  $\sin \theta \simeq \theta$  :  $mR\ddot{\theta} + mg\theta + \lambda R \dot{\theta} = 0$ . Soit :

$$\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m} \dot{\theta} + \frac{g}{R} \theta = 0$$

Q34 6. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est :  $r^2 + \frac{\lambda}{m}r + \frac{g}{R} = 0$ . Le régime est pseudo-périodique si le discriminant est négatif :  $\Delta = \frac{\lambda^2}{m^2} - 4\frac{g}{R} < 0$ . D'où  $\lambda < 2m\sqrt{\frac{g}{R}}$

7. Les racines de l'équation caractéristique sont de la forme :  $r_{\pm} = \frac{1}{2} \left( -\frac{\lambda}{m} \pm j\sqrt{4\frac{g}{R} - \frac{\lambda^2}{m^2}} \right)$

La solution est de la forme :  $\theta(t) = A \exp(-\frac{t}{\tau}) \sin(\Omega t + \varphi)$  avec  $\tau = 2m/\lambda$  et  $\Omega = \sqrt{\frac{g}{R} - \frac{\lambda^2}{4m^2}}$

Q35 Comme  $\theta(0) = 0$ , on peut choisir  $\varphi = 0$ .  $\dot{\theta}(0) = A\Omega = \frac{v_0}{R}$  donc  $A = \frac{v_0}{R\Omega}$

# ÉTUDE D'UN CIRCUIT ÉLECTRIQUE RLC

## A. Étude de la tension aux bornes du condensateur

Q36 1.  $\underline{Z}_b = jL\omega + r$ ,  $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$  et  $\underline{Z}_{\text{résistance}} = R$  d'où  $\underline{Z} = R_g + R + r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$

2. Le comportement de  $R$  ne change pas avec la fréquence. Haute fréquence,  $\omega$  tend vers l'infini donc :

- $|\underline{Z}_b| \rightarrow \infty$ , la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert.
- $|\underline{Z}_C| \rightarrow 0$ , le condensateur se comporte comme un fil.  $\Rightarrow u_c(t)$  est nulle à HF

Q37 Basse fréquence :  $\omega$  tend vers l'infini donc :

- $|\underline{Z}_b| \rightarrow r$ ,
- $|\underline{Z}_C| \rightarrow \infty$ , aucun courant dans le circuit, ainsi les tensions aux bornes des résistors sont nulles, d'après la loi des mailles :  $\Rightarrow u_c(t) + 0 + 0 = e(t)$  à BF

3. Puisque les composants sont en séries, on peut utiliser un pont diviseur de tension ( $\underline{e} = E \exp(j\omega t)$ ) :

$$\underline{u}_c = \frac{\underline{Z}_C}{R_g \underline{Z}_b + R + \underline{Z}_C} \underline{e} \quad \underline{U}_c = \frac{E}{1 - LC\omega^2 + jC\omega(R_g + r + R)}$$

Q38 soit sous la forme canonique :

$$\underline{U}_c = \frac{A}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Q39 et par identification, on obtient :  $A = E$   $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{1}{R_g + r + R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

4.  $U_{ce} = |\underline{U}_c| = \frac{E}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$  En posant  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ ,  $U_{ce} = \frac{E}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$

Q40 5. Pour étudier l'extremum, étudions la fonction  $f(x) = (1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2$ .

$f'(x) = -2(1 - x^2)2x + \frac{2x}{Q^2} = 2x \left(-2(1 - x^2) + \frac{1}{Q^2}\right)$  ( en cas d'égalité,  $x_r$  vaut à nouveau 0, d'où le strictement supérieur) La dérivée s'annule pour  $x = 0$  et pour  $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$  si  $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$  cad

$$Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

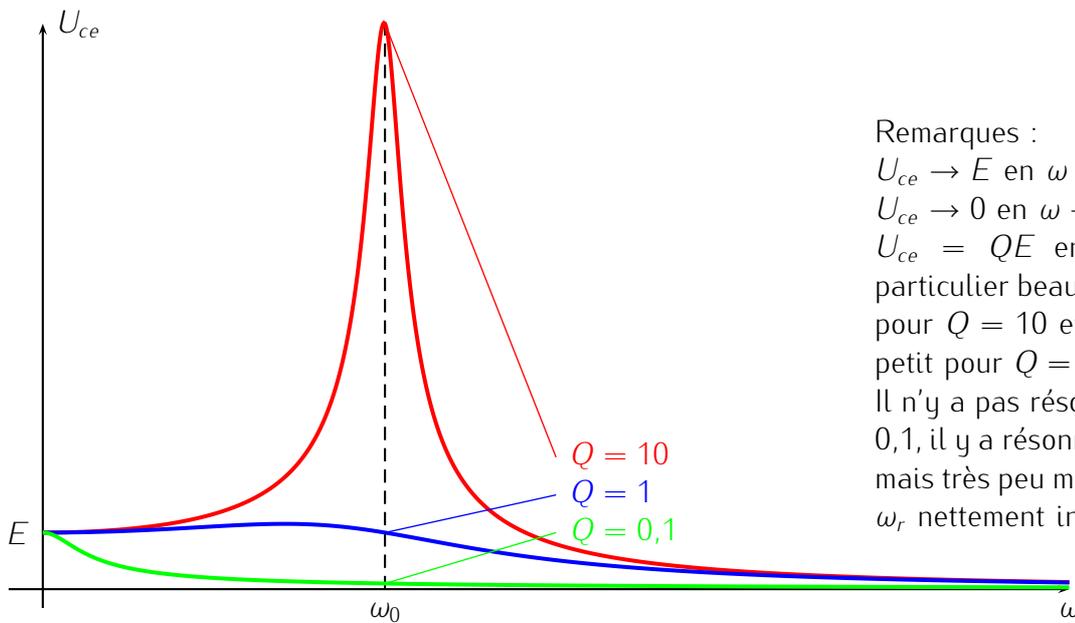
$f'$  est positive pour  $x > x_r$  (en regardant la limite en  $+\infty$ ), on a donc un minimum de  $f$  en  $x = x_r$ , et également de  $\sqrt{f}$  (car la fonction racine est str. croissante).

$U_{ce}(x)$  admet donc un minimum en  $x = x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$  si  $Q > Q_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0$$

Q41 6. Avec la valeur  $\omega = \omega_0$  dans l'expression de  $U_{ce}(\omega)$ , on obtient  $U_{ce}(\omega) = \frac{E}{Q}$   $U_{ce}(\omega) = QE$

Q42 7. Allure de  $U_{ce} = U_{ce}(\omega)$  pour les valeurs de  $Q = 0,1$ ,  $Q = 1$  et  $Q = 10$  (de bas en haut).



Remarques :

$$U_{ce} \rightarrow E \text{ en } \omega = 0$$

$$U_{ce} \rightarrow 0 \text{ en } \omega \rightarrow \infty$$

$U_{ce} = QE$  en  $\omega = \omega_0$  (en particulier beaucoup plus grand pour  $Q = 10$  et beaucoup plus petit pour  $Q = 0,1$ )

Il n'y a pas résonance en  $Q = 0,1$ , il y a résonance en  $Q = 1$ , mais très peu marqué et pour un  $\omega_r$  nettement inférieur à  $\omega_0$ .

### B. Étude de l'intensité

Q43 1.  $\underline{Z} = (R_g + r + R) + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R_0 \left( 1 + j\frac{L\omega}{R_0} - \frac{1}{jR_0C\omega} \right) = R_0 \left( 1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)$

avec  $R_0 = R_g + r + R$

Remarque : par identification, on retrouve bien les valeurs de  $\omega_0$  et de  $Q$  déterminées précédemment. Il faut vérifier que cela fonctionne bien pour avoir tous les points.

Q44 2. Avec les amplitudes complexes :  $\underline{E} = \underline{Z} \underline{I}$   $\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{E}{R_0 \left( 1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)}$

Q45 3. Prenons le module de l'expression précédente :  $I_e(\omega) = |\underline{I}| = \frac{E}{R_0 \sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$

$A' = \frac{E}{R_0}$  et  $B' = Q$

4. Pour étudier le maximum, montrons que la fonction  $f(x) = 1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2$  admet un minimum (on pose  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ ). Cette fonction admet un minimum si  $Q^2(x - \frac{1}{x})^2$  admet un minimum, or c'est un carré, donc la plus petite valeur possible est 0, cette valeur est atteinte en  $x = 1$  uniquement ( $x = -1$  n'étant pas pertinent car  $x \geq 0$ ). Cad  $\omega = \omega_0$ . Comme la fonction racine est strictement croissante et que la fonction inverse est strictement décroissante,  $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$  passe par un maximum pour  $\omega'_r = \omega_0$  et

Q46  $I_{max} = I_e(\omega_0) = \frac{E}{R_0}$

5. La bande passante est l'intervalle de pulsations (ou de fréquences)  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  pour lequel  $I_e(\omega) \geq \frac{I_{e,max}}{\sqrt{2}}$ .

Ici, on cherche  $x$  tel(s) que  $I_e = \frac{I_{e,max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow 1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2 = 2 \Rightarrow Q(x - \frac{1}{x}) = \pm 1 \iff Qx^2 \pm x - Q = 0 \iff x^2 \pm \frac{x}{Q} - 1 = 0$

et on obtient quatre solutions  $x = \pm \frac{1}{2Q} \pm \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}$  dont deux sont positives et en ne retenant que ces dernières,

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} \Rightarrow x_2 - x_1 = \frac{1}{Q} \iff \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

Q47 La largeur de la bande est donc inversement proportionnelle au facteur de qualité.

- Q48 6. La courbe en traits pleins correspond à  $U_{ce}(f)$  et celle en pointillés à  $I_e(f)$ . 2 justifications possibles :
- en étudiant les limites des 2 fonctions à basse fréquence : l'intensité s'annule alors que la tension tend vers  $E$ .
  - ou en remarquant que la fréquence de résonance est plus faible pour  $U_{ce}$  que pour  $I_e$ .  
Par contre, on ne peut pas comparer les amplitudes des résonances : les 2 courbes n'ont pas la même unité !
- Q49 7.
- $f_0$  est obtenue pour la résonance en intensité. On lit  $f_0 = 1,6 \text{ kHz}$  On ne peut pas utiliser le maximum de  $U_{ce}$  par contre.
  - $E$  est la valeur de  $U_{ce}$  à  $\omega = 0$ . On lit  $E = 5 \text{ V}$ .
  - on lit  $I_{e,max} = 9 \text{ mA}$ .  $\frac{I_{e,max}}{\sqrt{2}} = 6,4 \text{ mA}$ . Les fréquences qui donnent cette valeur de l'intensité sont  $f_1 = 1,2 \text{ kHz}$  et  $f_2 = 2,1 \text{ kHz}$  soit  $\Delta f = 0,9 \text{ kHz}$ .
  - en utilisant la formule  $Q = \frac{f_0}{\Delta f}$  on obtient  $Q = 1,8$ . On peut aussi utiliser  $U_{ce}(\omega_0) = QE$ , ce qui donne  $Q = 1,8$ , valeur similaire compte tenu des incertitudes de mesures. (Attention  $U_{ce}(\omega_0) \neq U_{ce,max}$ ).
- Q50
- $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  d'où  $L = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C^2}$   
A.N.  $L = \frac{1}{4\pi^2 (1,6 \cdot 10^3)^2 (0,1 \cdot 10^{-6})^2}$   $L = 0,1 \text{ H}$
  - $Q = \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{L}{C}}$  avec  $R_0 = R_g + r + R$  d'où  
 $r = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} - R - R_g$   
A.N.  $r = 26 \Omega$
  - Pour  $r$ , on peut aussi utiliser  $I_{e,max} = \frac{E}{R_0} \Rightarrow r = \frac{E}{I_{e,max}} - R - R_g$ . A.N.  $r = 26 \Omega$

### C. Utilisation d'une autre bobine

Q51 1.  $\phi = \arg \left[ \frac{i}{e} \right] = \arg \left[ \frac{1}{Z} \right] = -\arg[Z] = -\arg \left( R_0 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right) \Rightarrow \phi = -\arctan \left( Q \left( x - \frac{1}{x} \right) \right)$

$$\varphi' = \arg[U]_C = \arg[Z]_C [i] = \arg[i] - \arg jC\omega \Rightarrow \varphi' = \phi - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - \arctan \left( Q \left( x - \frac{1}{x} \right) \right)$$

En prenant  $x = 1$ , on trouve  $\phi(\omega_0) = 0$  et  $\varphi'(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$

- Q52 2. Il existe plusieurs façons pour accéder expérimentalement à la mesure de  $i(t)$  avec un oscilloscope , l'essentiel est de ne pas faire d'erreur avec la masse du circuit.

- on peut intervertir  $R$  et  $C$ , et brancher l'oscilloscope aux bornes de  $R$ . La masse du circuit et de l'oscillo sont bien confondues.
- on peut utiliser un oscilloscope différentiel et se brancher aux bornes de  $R$  sans se soucier de la masse.
- on peut également intercaler un transformateur d'isolement entre le GBF et le circuit de façon à s'affranchir de sa masse. On branche ensuite l'oscilloscope aux bornes de  $R$ .

- Q53 3. Le maximum aux bornes de  $R$  correspond à la résonance en intensité.

- Q54 4. (a) • Sur l'oscillogramme (a), les deux signaux sont en phase. Le déphasage entre la voie  $X$  et la voie  $Y$  est donc nul.

- Sur l'oscillogramme (b), le signal en traits pleins CH1 est en avance sur CH2. On compte 2,4 carreaux pour une période et le décalage est de 0,6 carreaux, ce qui donne un déphasage de  $\frac{\pi}{2}$  (a priori l'énoncé ne précise pas le déphasage de quoi par rapport à quoi, une valeur absolue suffit ici).

Q55 5. On est à la pulsation  $\omega_0$  cad à la résonance en intensité. À cette pulsation, on n'a pas de déphasage entre l'intensité et la tension du GBF : l'oscillogramme (a) montre donc à la tension aux bornes de la résistance sur CH2. Par élimination, le (b) est donc celui de la tension aux bornes du condensateur. Une autre justification serait de voir que le maximum de CH2 est plus grand pour (b) et c'est le cas pour la tension aux bornes du condensateur.

Q56 6. Utilisons les amplitudes des tensions pour avoir des informations sur les valeurs des composants.

À  $\omega_0$ , c'est la résonance en intensité pour laquelle  $U_{R,max} = R \times I_{e,max} = \frac{RE}{R_0}$  donc  $R_0 = \frac{RE}{U_{R,max}}$ .

On lit sur (a) :  $E = 6 \text{ V}$  et  $U_{R,max} = 4,8 \text{ V}$ . Comme  $R = 480 \Omega$ , on déduit :

$$\text{A.N. : } R_0 = \frac{480 \times 6}{4,8} = 600 \Omega$$

$$\text{Puis } r' = R_0 - R - R_g, \text{ A.N. : } r' = 600 - 480 - 50 = 70 \Omega$$

On peut utiliser ici la formule  $U_{ce,max} = QE$  qui est valable pour  $x = 1$  (qui n'est pas la résonance en tension!). On lit  $U_{ce,max} = 20 \text{ V}$  donc  $Q = 3,3$

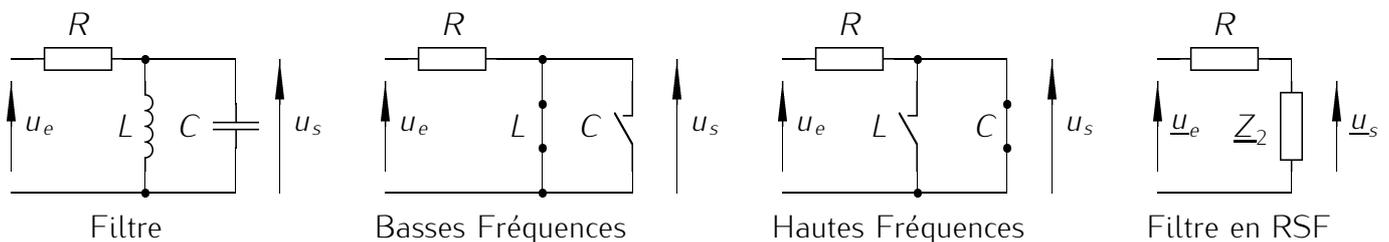
$$\text{Comme } Q = \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{L'}{C}}, \text{ on en déduit } L'^2 = CQ^2R_0^2. \text{ A.N. } L' = 0,1 \cdot 10^{-6} \times 3,3^2 \times 600^2 \quad L' = 0,4 \text{ H}$$

## EXERCICE BONUS : À NE TRAITER QUE SI TOUT EST FAIT

Reprenons les hypothèses de l'énoncé :

- En régime permanent  $i = 15 \text{ mA}$  alors qu'un condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert en régime continu. On en déduit que ni  $D_1$  ni  $D_2$  ne peut être constitué d'un condensateur seul, c'est à dire que  $C$  n'est pas sur la branche principale mais en dérivation avec  $R$  ou  $L$  dans  $D_1$  ou  $D_2$ .
- Le filtre constitué est un passe bande, ce qui signifie que la tension aux bornes de  $D_2$  doit s'annuler en basses fréquences et hautes fréquences.  $D_2$  doit donc équivaler à un interrupteur fermé en hautes fréquences et en basses fréquences, il ne peut s'agir ni de  $R$  seule ni de  $R$  en parallèle avec  $C$  ni de  $L$  seul.

Le seul circuit possible est donc celui représenté ci-dessous à gauche.



On vérifie le comportement asymptotique.

Pour déterminer la valeur de  $R$ , on applique la loi de Pouillet au circuit en régime continu :

$$i = \frac{E}{R} \Rightarrow R = \frac{E}{i} = \frac{15}{15 \cdot 10^{-3}} = 1000 \Omega$$

On exprime ensuite la fréquence de résonance et la bande passante en fonction de  $R$ ,  $L$  et  $C$ .

Pour cela, il faut déterminer  $\omega_0$  et  $Q$  la pulsation de résonance et le facteur de qualité du filtre.

On calcule donc la fonction de transfert  $\underline{H}$  du filtre puis on identifie avec une forme canonique.

Sur la figure ci-dessus à droite, on reconnaît un pont diviseur de tension pour lequel  $\underline{Y}_2 = \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{jL\omega} + jC\omega$  et

$$\underline{u}_s = \frac{Z_2}{R + Z_2} \underline{u}_e = \frac{1}{R \cdot \underline{Y}_2 + 1} \underline{u}_e \Rightarrow \underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{R}{jL\omega} + jRC\omega} = \frac{1}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})} = \frac{1}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$$

avec par identification  $\frac{Q}{\omega_0} = RC \Rightarrow Q = RC\omega_0$  et  $Q\omega_0 = \frac{R}{L}$  d'où  $RC\omega_0^2 = \frac{R}{L} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = RC\omega_0 = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ .

Pour un filtre passe bande,  $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$  et ici, on en déduit

$$\Delta\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}} = \frac{1}{RC} \Rightarrow C = \frac{1}{R \cdot \Delta\omega} = \frac{1}{2\pi\Delta f} \simeq 468 \text{ nF} \text{ puis } \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow L = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C} \simeq 40 \text{ mH}$$