DM 4*- Polynômes

Cet exercice est inspiré de classiques de sujets (écrit ou oraux) de concours type "Centrale-Supelec" ou plus.

Je l'ai détaillé bien plus que dans sa version pour élèves de fin de deuxième année, mais la technique utilisée est toujours la même.

Vous trouverez de nombreux exemples d'équations similaires sur le net, avec des corrigés, mais essayez déjà de chercher avec mon guide. Je préfère que vous me posiez des questions plutôt que vous vous "divulgachiez" la solution sur internet...

Exercice 1 On se propose résoudre l'équation polynomiale d'inconnue $P \in \mathbb{C}[X]$ suivante :

$$P(X^2) = P(X)P(X-1)$$

Remarquons déjà que le polynôme nul est solution. Dans toute la suite de l'exercice, on suppose donc P non nul.

1. Soit $n = deg(P)$. Quel est le degré de $P(X^2)$? De $P(X-1)$? En déduire... qu'on ne peut pas raisonner aussi simplement sur le degré que dans les autres exercices qu'on a fait !
2. Quels sont les polynômes constants solutions de cette équation ?
3. On suppose désormais P non constant.
   a) Justifiez que P admet une racine $\alpha \in \mathbb{C}$.
   b) Montrez que α^2 est racine également, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, α^{2^n} est racine.
   c) En déduire que $|\alpha| = 0$ ou $|\alpha| = 1$. On pourra raisonner par l'absurde.
   d) Montrez que $\alpha + 1$ est racine également. En déduire que $|\alpha + 1| = 1$ ou $|\alpha + 1| = 0$
   e) Résoudre géométriquement le système d'équation

   $$\begin{cases} |z| &= 1 \\ |z+1| &= 1 \end{cases}$$

   f) Déduire de tout ce qui précède que $\alpha \in \{0, -1, j, \bar{j}\}$ où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$
4. En utilisant la question précédente, écrire l'allure de la décomposition primaire de Pdans $\mathbb{C}[X]$.
5. En remplaçant dans l'équation de départ, montrez que 0 et -1 sont d'ordre de multiplicité nulle, et que j et $\bar{j}$ sont de même ordre de multiplicité.
6. En déduire que les polynômes non nul solutions de l'équation sont tous les polynômes de la forme

   $$P = (X^2 + X + 1)^m \text{ avec } m \in \mathbb{N}$$