

Devoir Maison n° ??.

Pour le 8 janvier 2024.

Exercice 1 : (niveau CCINP)

On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{n-k+2}$.

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leq 1$.

2. On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

Justifier que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

3. a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$.

b) Déterminer l'ensemble réel de définition de la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

c) On note $\sum_{n \geq 0} w_n x^n$ la série entière produit de Cauchy des séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$.

Justifier que le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} w_n x^n$ est supérieur ou égal à 1 et donner pour tout entier naturel n , une expression de w_n à l'aide de la suite (a_n) .

d) En déduire que l'on a pour tout $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = f(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

4. Démontrer alors que pour tout $x \in [0, 1[$, $\ln(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.

5. En déduire, pour tout $x \in [0, 1[$, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

On utilisera sans le redémontrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.

6. Justifier que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 2 : (niveau Centrale)

Notations

$\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels.

$(H_j)_{j \in \mathbb{N}}$ désigne la famille de polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $H_j = \frac{1}{j!} \prod_{i=0}^{j-1} (X - i)$.

Pour $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial k parmi n . On a $\binom{0}{0} = 1$ et $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$.

$\llbracket a, b \rrbracket$ désigne l'ensemble des entiers compris entre a et b . Ainsi, $\llbracket a, b \rrbracket = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\}$.

A. Une première formule

Q1. Donner sans démonstration le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\sum_{n \geq 0} x^n$.

Q2. En déduire le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\sum_{n \geq 0} nx^n$.

Q3. Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que la série entière $\sum_{n \geq 0} \binom{n}{k} x^n$ admet 1 pour rayon de convergence et que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

B. Utilisation d'une famille de polynômes

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $f_k : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n$.

Q4. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est définie sur $] -1, 1[$.

Q5. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que (H_0, \dots, H_k) est une base de $\mathbb{R}_k[X]$ et qu'il existe une unique famille

$$(\alpha_{k,0}, \dots, \alpha_{k,k}) \text{ dans } \mathbb{R}^{k+1} \text{ telle que } X^k = \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} H_j.$$

Q6. Pour $k \in \mathbb{N}$, donner les valeurs de $\alpha_{k,0}$ et $\alpha_{k,k}$.

Q7. Pour tout couple $(j, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leq j \leq k$, montrer que $\alpha_{k,j} = j^k - \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} \alpha_{k,i}$.

Q8. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme réel P_k tel que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $f_k(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$ et que ce polynôme vérifie la relation

$$P_k = \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} X^j (1-X)^{k-j}.$$

Q9. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_{k+1} = X(1-X)P'_k + (k+1)XP_k$.

Q10. Calculer explicitement P_2 et P_3 .

Q11. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le degré de P_k ainsi que son coefficient dominant.

Q12. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0, 1[$, $x^{k+1} P_k \left(\frac{1}{x} \right) = P_k(x)$.

Q13. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, un lien entre les coefficients de degré j et $k+1-j$ de P_k .

C. Une dernière formule

On s'intéresse dans cette sous-partie à la série entière $\sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} x^n$ dont on note R le rayon de convergence.

Q14. Déterminer R et montrer que, pour tout $x \in]-R, R[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

Q15. Montrer que, pour tout $x \in]-R, R[\setminus \{0\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Q16. En déduire que, pour tout $x \in]-R, R[\setminus\{0\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} x^n = \frac{1}{2x} \left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1 \right).$$

Q17. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1}.$$