DEVOIR MAISON 7 (Séries entières)

Corrigé

Problème 1 : *(CCP PC 2005)*

Q1.(a) Soit $R > 0$ tel que pour tout $x \in]-R, R[$, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
En tant que somme d'une série entière, la fonction y est deux fois dérivable sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$ et on a pour tout $x \in]-R, R[$:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& y \text{ est solution de l'équation } (\mathscr{E}_\lambda) \text{ sur }]-R, R[\\
\Leftrightarrow & \forall x \in]-R, R[\ , x(x+1) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + (2x+1) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \lambda(\lambda+1) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\
\Leftrightarrow & \forall x \in]-R, R[\ , \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \lambda(\lambda+1) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\
\Leftrightarrow & \forall x \in]-R, R[\ , \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \lambda(\lambda+1) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\
\Leftrightarrow & \forall x \in]-R, R[\ , \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(n(n-1) a_n + (n+1) n a_{n+1} + 2n a_n + (n+1) a_{n+1} - \lambda(\lambda+1) a_n \Big) x^n = 0 \\
\Leftrightarrow & \forall x \in]-R, R[\ , \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\big(n(n+1) - \lambda(\lambda+1) \big) a_n + (n+1)^2 a_{n+1} \Big) x^n = 0.
\end{aligned}$$

Ce qui est équivalent par unicité des cœfficients du développement en série entière (puisque $R > 0$) à :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \big(n(n+1) - \lambda(\lambda+1) \big) a_n + (n+1)^2 a_{n+1} = 0 \text{ ou encore } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{(\lambda+n+1)(\lambda-n)}{(n+1)^2} a_n.$$

$$\boxed{y \text{ est solution de } (\mathscr{E}_\lambda) \text{ si et seulement si } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{(\lambda+n+1)(\lambda-n)}{(n+1)^2} a_n.}$$

Q1.(b) La fonction y est solution de l'équation $(\mathscr{E}_\lambda)$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{(\lambda+n+1)(\lambda-n)}{(n+1)^2} a_n$.
On remarque que si $a_0 = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$ (récurrence) donc y est identiquement nulle, ce qui n'est pas le cas.
Ainsi, $a_0 \neq 0$ et en remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{(\lambda+n+1)(\lambda-n)}{(n+1)^2} \neq 0$ puisque λ n'est pas un entier, on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left| \frac{(\lambda+n+1)(\lambda-n)}{(n+1)^2} \right| \sim \frac{n^2}{n^2} \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1.$$

Par le critère de d'Alembert pour les séries entières, on en déduit :

$$\boxed{\text{le rayon de convergence de la série entière } \sum a_n x^n \text{ est égal à } \frac{1}{1} = 1.}$$

Q1.(c) D'après Q1(a), si y est une solution de $(\mathscr{E}_\lambda)$ développable en série entière alors :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ où pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{(\lambda+n+1)(\lambda-n)}{(n+1)^2} a_n.$$

Si elle vérifie de plus $y(0) = 1$ alors $a_0 = 1$.

Réciproquement, si y est définie par $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{(\lambda+n+1)(\lambda-n)}{(n+1)^2} a_n$ et $a_0 = 1$ alors elle vérifie $y(0) = 1$ et d'après Q1(b) (y n'étant pas la fonction nulle), cette série entière a pour rayon de convergence $R = 1 > 0$, et par les équivalences établies en Q1(a), y est une solution de $(\mathscr{E}_\lambda)$ sur $]-1,1[$.

On a ainsi établi qu'il existe une unique solution de $(\mathscr{E}_\lambda)$, développable en série entière sur $]-1,1[$ qui prend la valeur 1 en 0.

Ses cœfficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définis par : $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = \frac{(\lambda+n+1)(\lambda-n)}{(n+1)^2} a_n$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{(n!)^2} \prod_{k=1}^{n} (\lambda+k) \prod_{k=0}^{n-1} (\lambda-k)$.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $a_1 = \frac{(\lambda+0+1)(\lambda-0)}{(0+1)^2} a_0 = (\lambda+1)\lambda \times 1 = \frac{1}{(0!)^2} \prod_{k=1}^{1} (\lambda+k) \prod_{k=0}^{0} (\lambda-k)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $a_n = \frac{1}{(n!)^2} \prod_{k=1}^{n} (\lambda+k) \prod_{k=0}^{n-1} (\lambda-k)$.

On a alors :

$$a_{n+1} = \frac{(\lambda+n+1)(\lambda-n)}{(n+1)^2} a_n = \frac{(\lambda+n+1)(\lambda-n)}{(n+1)^2} \frac{1}{(n!)^2} \prod_{k=1}^{n} (\lambda+k) \prod_{k=0}^{n-1} (\lambda-k) = \frac{1}{((n+1)!)^2} \prod_{k=1}^{n+1} (\lambda+k) \prod_{k=0}^{n} (\lambda-k).$$

Ainsi :

> Il existe une unique solution, développable en série entière sur $]-1,1[$ qui prend la valeur 1 en 0.
> Ses cœfficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définis par : $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{(n!)^2} \prod_{k=-(n-1)}^{n} (\lambda+k)$.

Q2.(a) D'après le cours, on a pour tout $u \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+u} = (1+u)^{1/2} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} u^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.(-1)(-3)\dots(-(2n-3))}{2^n n!} u^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} 1.3\dots(2n-1)}{(2n-1)2^n n!} u^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{1.2.3\dots(2n-1)(2n)}{2^n n! 2.4\dots(2n)} u^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} u^n.
\end{aligned}$$

Comme le terme pour $n = 0$ vaut bien 1, on en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } u \in]-1,1[, \text{ on a } \sqrt{1+u} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} u^n.}$$

Q2.(b) Soit $x \in]-1,1[$.

On a pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $|x\sin^2(t)| \leqslant |x| < 1$ donc $x\sin^2(t) \in]-1,1[$ donc par la question précédente :

$$\sqrt{1 + x\sin^2 t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n \sin^{2n} t.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction $t \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n \sin^{2n} t$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Montrons que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n \sin^{2n} t\right| \leqslant \frac{1}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}|x|^n \text{ (ne dépend pas de } t\text{).}$$

Ainsi, $\dfrac{1}{2n-1}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}|x|^n$ est un majorant de $\{|f_n(t)|, t \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$ et $\|f_n\|_\infty^{[0,\frac{\pi}{2}]}$ est le plus petit majorant de cet ensemble donc :

$$0 \leqslant \|f_n\|_\infty^{[0,\frac{\pi}{2}]} \leqslant \frac{1}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}|x|^n.$$

La série numérique $\sum \dfrac{1}{2n-1}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}|x|^n$ converge par ce qui précède puisqu'on reconnaît la série entière de somme $-\sqrt{1-|x|}$ avec $|x| \in]-1,1[$.
On en déduit par comparaison que la série $\sum \|f_n\|_\infty^{[0,\frac{\pi}{2}]}$ converge.
Ainsi, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et on peut donc intégrer terme à terme :

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n \sin^{2n} t\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n} t\, dt\right)x^n.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } \psi \text{ est développable en série entière et pour tout } x \in]-1,1[,\ \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{2}{\pi}I_n x^n.}$$

Q2.(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Les fonctions $t \mapsto \sin^{2n-1} t$ et $t \mapsto -\cos t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et on a par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}(t)\sin(t)\, dt = [\sin^{2n-1}(t) \times (-\cos(t))]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(2n-1)\sin^{2n-2}(t)\cos(t) \times (-\cos(t))\, dt \\
&= 0 + (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-2}(t)(1-\sin^2(t))\, dt \\
&= (2n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2(n-1)}(t)\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}(t)\, dt\right) \\
&= (2n-1)(I_{n-1} - I_n).
\end{aligned}$$

On a donc $2nI_n = (2n-1)I_{n-1}$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \frac{2n-1}{2n}I_{n-1}.}$$

On a :

$$\boxed{I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dt = \frac{\pi}{2}.}$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $\dfrac{(2 \times 0)!}{2^{2\times 0+1}(0!)^2}\pi = \dfrac{\pi}{2} = I_0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi$. Montrons que $I_{n+1} = \dfrac{(2n+2)!}{2^{2n+3}((n+1)!)^2}\pi$.

On a $I_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2} I_n$ d'après ce qui précède donc en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi = \frac{(2n+1)!}{2(n+1)2^{2n+1}(n!)^2}\pi = \frac{(2n+2)(2n+1)!}{2^2(n+1)^2 2^{2n+1}(n!)^2}\pi = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+3}((n+1)!)^2}\pi.$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi.}$$

Par suite :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]-1,1[,\ \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2 x^n.}$$

Problème 2 : *(Centrale PC 2023)*

Q1. La série entière $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ est la série géométrique. D'après le cours :

$$\boxed{R\left(\sum_{n\geqslant 0} x^n\right) = 1 \text{ et pour tout } x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.}$$

Q2. Par le cours, on a :

$$R\left(\sum_{n\geqslant 0} nx^n\right) = R\left(\sum_{n\geqslant 0} x^n\right) = 1.$$

Notons $S : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.
Par dérivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, on obtient :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = S'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

On en déduit que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{R\left(\sum_{n\geqslant 0} nx^n\right) = 1 \text{ et pour tout } x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.}$$

Q3. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$R\left(\sum_{n\geqslant 0}\binom{n}{k}x^n\right) = R\left(\sum_{n\geqslant k}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^n\right) \underset{(\star)}{=} R\left(\sum_{n\geqslant k}\frac{n!}{(n-k)!}x^n\right) \underset{(\star\star)}{=} R\left(\sum_{n\geqslant 0} n^k x^n\right) \underset{(\star\star\star)}{=} R\left(\sum_{n\geqslant 0} x^n\right) = 1.$$

$(\star)$ $\dfrac{1}{k!}$ est une constante multiplicative non nulle.

$(\star\star)$ $\dfrac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-k+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^k$ car produit de k termes équivalents à n.

$(\star\star\star)$ La multiplication du cœfficient par n (ici k fois) ne change pas le rayon de convergence.

On note toujours $S : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.
Par k dérivations terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, on obtient :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = S^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}},$$

cette dernière égalité se prouvant par récurrence (initialisation vérifiée pour $k=0$ et pour l'hérédité, on notera que $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^{k+1}} = (1-x)^{-k-1}$ a pour dérivée $x \mapsto (-1)\times(-k-1)\times(1-x)^{-k-2} = \dfrac{k+1}{(1-x)^{k+2}}$ sur $]-1,1[$).
On en déduit que pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = 0 + \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^n = \frac{x^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{x^k}{k!} \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

Ainsi :

$$\boxed{R\left(\sum_{n\geqslant 0} \binom{n}{k} x^n\right) = 1 \text{ et pour tout } x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.}$$

Q4. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a déjà vu que :

$$R\left(\sum_{n\geqslant 0} n^k x^n\right) = R\left(\sum_{n\geqslant 0} x^n\right) = 1.$$

On en déduit que la somme de cette série entière est définie (au moins) sur $]-1,1[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f_k \text{ est définie sur }]-1,1[.}$$

Q5. On a $\deg(H_0) = 0$ et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\deg(H_j) = j$ (produit de j polynômes de degré 1).
Ainsi, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\deg(H_j) = j$.
La famille $(H_0, \ldots, H_k)$ est donc une famille constituée de $k+1$ polynômes de $\mathbb{R}_k[X]$, espace vectoriel de dimension $k+1$, et cette famille est libre car ces polynômes sont non nuls et de degrés deux à deux distincts.
Ainsi :

$$\boxed{(H_0, \ldots, H_k) \text{ est une base de } \mathbb{R}_k[X].}$$

Comme $X^k \in \mathbb{R}_k[X]$, on peut écrire X^k de façon unique à l'aide de ses coordonnées dans cette base.

$$\boxed{\text{Il existe une unique famille } (\alpha_{k,0}, \ldots, \alpha_{k,k}) \text{ dans } \mathbb{R}^{k+1} \text{ telle que } X^k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} H_j.}$$

Q6. Soit $k \in \mathbb{N}$. En évaluant la relation précédente en 0, on obtient $0^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} H_j(0) = \alpha_{k,0}$ car pour tout $j \geqslant 1$, $H_j(0) = 0$.
On en déduit que :

$$\boxed{\alpha_{0,0} = 1 \text{ et pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_{k,0} = 0.}$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, H_j est de degré j et a pour cœfficient dominant $\dfrac{1}{j!}$.
On a $X^k = \alpha_{k,k} H_k + \underbrace{\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{k,j} H_j}_{\text{degré} < k}$. Par identification du cœfficient de X^k , on obtient $1 = \alpha_{k,k} \dfrac{1}{k!}$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ \alpha_{k,k} = k!}.$$

Q7. Soit $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leqslant j \leqslant k$.
En évaluant l'égalité $X^k = \sum_{i=0}^{k} \alpha_{k,i} H_i$ en j, on obtient $j^k = \sum_{i=0}^{k} \alpha_{k,i} H_i(j)$.
Soit $i \in \mathbb{N}$. Calculons $H_i(j)$.
Pour $i = 0$, on a $H_i(j) = 1 = \binom{j}{0}$.
Si $1 \leqslant i \leqslant j$ alors $H_i(j) = \frac{1}{i!} \prod_{\ell=0}^{i-1} (j-\ell) = \frac{1}{i!} \frac{j!}{(j-i)!} = \binom{j}{i}$.
Si $i > j$ alors $H_i(j) = \frac{1}{i!} \prod_{\ell=0}^{i-1} (j-\ell) = 0$ car l'un des facteurs du produit est nul.
On en déduit que :

$$j^k = \sum_{i=0}^{j} \alpha_{k,i} \binom{j}{i} = \alpha_{k,j} + \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} \alpha_{k,i}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout couple } (j,k) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } 1 \leqslant j \leqslant k,\ \alpha_{k,j} = j^k - \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} \alpha_{k,i}.}$$

Q8. Soit $k \in \mathbb{N}$.
Notons que par les calculs effectués à la question précédente, on a pour tout $(j,n) \in \mathbb{N}^2$, $H_j(n) = \binom{n}{j}$.
Soit $x \in]-1,1[$. On a :

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} H_j(n) \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} \binom{n}{j} x^n = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{j} x^n$$

par linéarité car pour tout $j \in [\![0,k]\!]$, la série $\sum_{n \geqslant 0} \binom{n}{j} x^n$ converge d'après Q3.
Par Q3, on obtient également :

$$f_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} \frac{x^j}{(1-x)^{j+1}} = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} \frac{x^j (1-x)^{k-j}}{(1-x)^{k+1}} = \frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$$

par mise sur même dénominateur, en posant $P_k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} X^j (1-X)^{k-j}$.
Montrons l'unicité.
Si $Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifie pour tout $x \in]-1,1[$, $f_k(x) = \frac{Q(x)}{(1-x)^{k+1}}$ alors pour tout $x \in]-1,1[$, $P_k(x) = Q(x)$.
Le polynôme $P_k - Q$ a donc une infinité de racines donc c'est le polynôme nul. D'où $Q = P_k$.
On a donc prouvé :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ il existe un unique polynôme réel } P_k \text{ tel que, pour tout } x \in]-1,1[,\ f_k(x) = \dfrac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}} \\ \text{et ce polynôme vérifie la relation } P_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} X^j (1-X)^{k-j}. \end{array}}$$

Q9. Par dérivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, on a pour tout $x \in]-1,1[$:

$$f_k'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k n x^{n-1} \text{ donc } x f_k'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{k+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n^{k+1} x^n = f_{k+1}(x).$$

Comme pour tout $x \in]-1,1[$, $f_k(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$, on obtient également en dérivant :

$$f_k'(x) = \frac{P_k'(x)(1-x)^{k+1} + P_k(x)(k+1)(1-x)^k}{(1-x)^{2(k+1)}} = \frac{(1-x)P_k'(x) + (k+1)P_k(x)}{(1-x)^{k+2}}.$$

On a donc pour tout $x \in]-1,1[$:

$$f_{k+1}(x) = \frac{x(1-x)P_k'(x) + (k+1)xP_k(x)}{(1-x)^{k+2}}.$$

Par unicité établie en Q8, on en déduit :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ P_{k+1} = X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k.}$$

Q10. Pour tout $x \in]-1,1[$, $f_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ donc par l'unicité établie en Q8, $P_0 = 1$.
D'après la question précédente :

$$P_1 = X(1-X)P_0' + XP_0 = X$$

puis

$$P_2 = X(1-X)P_1' + 2XP_1 = X(1-X) + 2X^2 = X^2 + X$$

puis

$$P_3 = X(1-X)P_2' + 3XP_2 = X(1-X)(2X+1) + 3X(X^2+X) = X^3 + 4X^2 + X.$$

$$\boxed{P_2 = X^2 + X \text{ et } P_3 = X^3 + 4X^2 + X.}$$

Q11. Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, P_k est un polynôme unitaire de degré k.
Initialisation : $P_0 = 1$ est bien un polynôme unitaire de degré 0.
Pour plus de commodité dans l'hérédité, vérifions aussi pour $k = 1$: $P_1 = X$ est bien un polynôme unitaire de degré 1.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que P_k est un polynôme unitaire de degré k.
On a $P_{k+1} = X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k$.
Comme $k \geqslant 1$, on sait que P_k' est un polynôme de degré $k-1$ et de cœfficient dominant k.
Ainsi, $X(1-X)P_k'$ est un polynôme de dégré $k-1+2 = k+1$ et de cœfficient dominant $-k$.
Par ailleurs, $(k+1)XP_k$ est un polynôme de degré $k+1$ et de cœfficient dominant $k+1$.
Par somme, comme $-k+k+1 = 1 \neq 0$, on en déduit que P_{k+1} est un polynôme unitaire de degré $k+1$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ le degré de } P_k \text{ est } k \text{ son cœfficient dominant est } 1.}$$

Q12. Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0,1[$, $x^{k+1}P_k(\frac{1}{x}) = P_k(x)$.
Initialisation : Pour $k = 1$, comme $P_1 = X$, on a pour tout $x \in]0,1[$, $x^2 P_1(\frac{1}{x}) = x^2 \times \frac{1}{x} = x = P_1(x)$.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $x \in]0,1[$, $x^{k+1}P_k(\frac{1}{x}) = P_k(x)$.
Par dérivation, on obtient pour tout $x \in]0,1[$:

$$(k+1)x^k P_k(\frac{1}{x}) - x^{k-1}P_k'(\frac{1}{x}) = P_k'(x).$$

Par évaluation de la relation obtenue à la question Q9 en $\frac{1}{x}$, on obtient pour tout $x \in]0,1[$:

$$\begin{aligned}
x^{k+2}P_{k+1}(\frac{1}{x}) &= x^{k+1}(1-\frac{1}{x})P_k'(\frac{1}{x}) + (k+1)x^{k+1}P_k(\frac{1}{x}) \\
&= x^2(1-\frac{1}{x})x^{k-1}P_k'(\frac{1}{x}) + (k+1)P_k(x) \\
&= x^2(1-\frac{1}{x})((k+1)x^kP_k(\frac{1}{x}) - P_k'(x)) + (k+1)P_k(x) \\
&= (x-1)(k+1)x^{k+1}P_k(\frac{1}{x}) + x(1-x)P_k'(x) + (k+1)P_k(x) \\
&= x(k+1)P_k(x) + x(1-x)P_k'(x) \\
&= P_{k+1}(x).
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } x \in]0,1[,\ x^{k+1} P_k\left(\frac{1}{x}\right) = P_k(x).}$$

Q13. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On sait que P_k est un polynôme de degré k donc il existe $(a_0, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tels que $P_k = \sum_{j=0}^{k} a_j X^j$.

D'après la question précédente, pour tout $x \in]0,1[$:

$$P_k(x) = x^{k+1} \sum_{j=0}^{k} a_j x^{-j} = \sum_{j=0}^{k} a_j x^{k+1-j} = \sum_{i=1}^{k+1} a_{k+1-i} x^i.$$

Comme le polynôme $P_k - \sum_{i=1}^{k+1} a_{k+1-i} x^i$ a une infinité de racines, il est nul.

On a donc $P_k = \sum_{j=1}^{k+1} a_{k+1-j} x^j$ et par unicité des coefficients, on obtient :

$$\boxed{\text{pour tout } j \in [\![0,k]\!], \text{ les coefficients de degré } j \text{ et } k+1-j \text{ de } P_k \text{ sont égaux.}}$$

Q14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{2n}{n} \neq 0$ (car $n \leqslant 2n$) et on a :

$$\left| \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} \right| = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} \frac{n!^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \sim \frac{4n^2}{n^2} = 4 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 4.$$

Par la règle de d'Alembert pour les séries entières, on en déduit que :

$$\boxed{R = \frac{1}{4}.}$$

On sait que pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$(1+u)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\ldots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} u^n.$$

Pour tout $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, comme $u = -4x \in]-1,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-4x}} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\ldots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-1)^n 2^{2n} x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{n!} (-1)^n 2^{2n} x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \frac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) \times 2n}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n (2n)!}{n! \times 2^n n!} x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!^2} x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]-\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}[,\ \frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n.}$$

Q15. On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\binom{2n}{n}\frac{x^{n+1}}{n+1}$.
Par le théorème de dérivation des séries entières, son rayon de convergence est le même que celui de la série entière $\sum\binom{2n}{n}x^n$ (obtenue par dérivation terme à terme) donc $R\left(\sum\binom{2n}{n}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=R=\frac{1}{4}$, et en notant f sa somme, on a pour tout $x\in]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[$:

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n=\frac{1}{\sqrt{1-4x}}.$$

Soit $x\in]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[$. En intégrant entre 0 et x, on obtient :

$$f(x)-f(0)=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-4t}}\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{2}\sqrt{1-4t}\right]_0^x=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}.$$

Comme de plus $f(0)=0$, on en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$.
Ainsi, en divisant par x, on obtient :

$$\boxed{\text{pour tout } x\in]-R,R[\smallsetminus\{0\},\ \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.}$$

Q16. Par produit de Cauchy des séries entières $\sum\binom{2n}{n}x^n$ et $\sum\binom{2n}{n}\frac{x^n}{n+1}$ qui ont toutes les deux pour rayon de convergence $\frac{1}{4}$, on a pour tout $x\in\mathbb{R}$ tel que $|x|<\min(\frac{1}{4},\frac{1}{4})=\frac{1}{4}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}x^n=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^n}{n+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n\right).$$

On en déduit par les deux questions précédentes que pour tout $x\in]-R,R[\smallsetminus\{0\}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}x^n=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\times\frac{1}{\sqrt{1-4x}}=\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}-1\right).$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x\in]-R,R[\smallsetminus\{0\},\ \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}x^n=\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}-1\right).}$$

Q17. D'après Q14, on a pour tout $x\in]-R,R[\smallsetminus\{0\}$:

$$\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}-1\right)=\frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n=\frac{1}{2x}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2(n+1)}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}x^n.$$

Par Q16, on en déduit que pour tout $x\in]-R,R[$ (vrai aussi en $x=0$, les deux membres valent 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}x^n.$$

Par unicité des cœfficients d'un développement en série entière, on en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}=\frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}.}$$