DM8 (Intégration)
Pour le lundi 8 janvier

Problème 1 : étude de quelques intégrales classiques (niveau 1)

A. Fonction Gamma d'Euler

On pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction Γ a pour ensemble de définition $]0,+\infty[$.
2. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
   En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer l'existence des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^4}\mathrm{d}t$ et les exprimer à l'aide de Γ.

B. Intégrales de Gauss

On appelle *intégrales de Gauss* les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}\mathrm{d}t$ où a est un réel strictement positif.

1. Montrer que pour tout réel u, on a $e^u \geqslant 1+u$.
2. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que :
$$\begin{cases} (1-u)^n \leqslant e^{-nu} & \text{si} \quad u \leqslant 1 \\ e^{-nu} \leqslant \dfrac{1}{(1+u)^n} & \text{si} \quad u > -1. \end{cases}$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$ convergent et établir les inégalités :
$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}.$$
4. À l'aide de trois changements de variable, en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$W_{2n+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant W_{2n-2}$$
   où pour tout entier naturel n, on note :
$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\,\mathrm{d}t.$$
5. En admettant que $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.
6. Montrer que pour tout $a \in]0,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}\mathrm{d}t$ converge et déterminer sa valeur.

C. Intégrale de Dirichlet

On appelle *intégrale de Dirichlet* l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} \mathrm{d}t$ converge.
2. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ est convergente.
   On note I sa valeur.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} \mathrm{d}t.$$

   (a) Justifier que I_n et J_n sont bien définis pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+1} - I_n = 0$. En déduire I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Soit $\varphi : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
   À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} \varphi(t) \sin((2n+1)t) \mathrm{d}t = 0.$$

   (d) En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (J_n - I_n) = 0$.
   (e) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.
   (f) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} \mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| \mathrm{d}t$.
   En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ n'est pas absolument convergente.

Problème 2 (sujet Mines, niveau 2)

Tout au long du problème, le disque unité ouvert de $\mathbf{C}$ sera noté :

$$D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}.$$

A. Fonctions L et P

1. Soit $z \in D$. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{n}$.
   Préciser la valeur de sa somme lorsque $z \in]-1, 1[$. On notera :

$$L(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}.$$

2. Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $\Phi : t \mapsto L(tz)$ est dérivable sur $[-1, 1]$ et donner une expression simple de sa dérivée.
3. Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $\Psi : t \mapsto (1 - tz)e^{L(tz)}$ est constante sur $[0, 1]$, et en déduire que :

$$\exp(L(z)) = \frac{1}{1-z}.$$

4. Montrer que $|L(z)| \leqslant -\ln(1 - |z|)$ pour tout z dans D.
   En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} L(z^n)$ pour tout z dans D.

Dans la suite, on notera, pour z dans D :

$$P(z) := \exp\left[\sum_{n=1}^{+\infty} L\left(z^n\right)\right].$$

5. Soit $z \in D$. Vérifier que $P(z) \neq 0$, que :

$$P(z) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n}$$

et que pour tout réel $t > 0$:

$$\ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1-e^{-nt}\right).$$

B. Développement asymptotique en variable réelle

Dans cette partie, on introduit la fonction q qui à tout réel x associe le nombre réel $q(x) = x - \lfloor x \rfloor - \dfrac{1}{2}$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

1. Montrer que q est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$, qu'elle est 1-périodique et que la fonction $|q|$ est paire.
2. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{e^{tu}-1}\,\mathrm{d}u$ est bien définie pour tout réel $t > 0$.
3. Montrer que pour tout entier $n > 1$:

$$\int_1^n \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \ln(n!) + (n-1) - n\ln(n) - \frac{1}{2}\ln(n) = \ln\left(\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}\right) - 1.$$

4. Montrer que $\displaystyle\int_{\lfloor x \rfloor}^{x} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, et en déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\,\mathrm{d}u$, ainsi que l'égalité :

$$\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.$$

5. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1-e^{-u}\right)\mathrm{d}u$ converge.
On admet pour la suite qu'elle a pour valeur :

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1-e^{-u}\right)\mathrm{d}u = -\frac{\pi^2}{6}.$$

6. Montrer que :

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right)\mathrm{d}u \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} -1.$$

On pourra commencer par établir que $x \mapsto \dfrac{1-e^{-x}}{x}$ *est décroissante sur* $\mathbf{R}_+^*$.

Pour $k \in \mathbf{N}^*$ et $t \in \mathbf{R}_+$, on pose :

$$u_k(t) = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u \quad \text{si } t>0, \quad \text{et} \quad u_k(t) = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{q(u)}{u}\,\mathrm{d}u \quad \text{si } t=0.$$

On admet que u_k est continue sur $\mathbf{R}_+$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

7. Soit $t \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer successivement que $|u_k(t)| = \displaystyle\int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u$ puis $u_k(t) = (-1)^{k+1}|u_k(t)|$ pour tout entier $k \geqslant 1$, et établir enfin que :
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t)\right| \leqslant \frac{1}{2n}.$$
On admettra dans la suite que cette majoration vaut encore pour $t=0$.
8. En déduire que :
$$\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.$$
9. Montrer, pour tout réel $t>0$, l'identité :
$$\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-t}\right) - \ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) - \int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u.$$
10. Conclure que :
$$\ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) = \frac{\pi^2}{6t} + \frac{\ln(t)}{2} - \frac{\ln(2\pi)}{2} + \underset{t\to 0^+}{o}(1).$$