Chapitre 19

Dérivation des fonctions d'une variable réelle

Dans tout ce chapitre, on fixe un intervalle I de $\mathbb{R}$ non trivial.

1 Dérivée en un point

1.1 Définitions

Définition 1.1 (Dérivée)

Soit $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ et $a \in I$.

1. La fonction f est *dérivable* en a (resp. *dérivable à gauche*, *dérivable à droite* en a) si le taux d'accroissement de f en a
$$\begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$$
admet une limite finie en a (resp. une limite finie à gauche, à droite en a). On note
$$f'(a) \quad (\text{resp.} \quad f'_g(a), \quad f'_d(a))$$
ces limites.

2. La fonction f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. La *dérivée* de f est la fonction
$$\begin{array}{cccc} f' & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x). \end{array}$$

Remarques.

1. On rappelle le vocabulaire de *taux d'accroissement en a*.
2. On a vu qu'une fonction à valeur complexe admet une limite en un point si et seulement si ses parties réelle et imaginaire en admettent une, et que les parties réelle et imaginaire de la limite sont les limites des parties réelle et imaginaire. On en déduit que f est dérivable si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont et
$$f' = (\mathrm{Re}(f))' + i\,(\mathrm{Im}(f))'.$$

3. Si a est l'extrémité gauche (resp. droite) de I, il n'y a pas de notion de limite à gauche (resp. à droite) en a, et les notions de dérivée et dérivée à droite (resp. dérivée et dérivée à gauche) coïncident.
4. La dérivation, étant un problème de limite, est une notion locale. Si f et g coïncident au voisinage de a, alors f est dérivable en a si et seulement g l'est, et alors $f'(a) = g'(a)$.
5. Si f est dérivable en a, la droite passant par $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$ a pour pente
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$
et les cordes ont une droite limite de pente $f'(a)$. Cette droite a pour équation $y = (x-a)f'(a)+f(a)$.
6. On note $\mathcal{D}(I)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{D}(I, J)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I, à valeurs dans un ensemble J ($J = \mathbb{C}$, ou $J \subset \mathbb{R}$,...).

Proposition 1.2

Soit $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ et $a \in I$ qui n'est pas une borne de I. La fonction f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a et si $f'_g(a) = f'_d(a)$, et alors on a
$$f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a).$$

1.2 Premières propriétés

Proposition 1.3 (Continuité des fonctions dérivables)

Soit $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ et $a \in I$. Si f et dérivable en a (resp. dérivable à gauche, à droite en a), alors f est continue en a (resp. continue à gauche, à droite en a).

Remarques.

1. Attention, la réciproque est fausse, comme le prouve l'exemple de la fonction valeur absolue en 0 : elle et continue en 0, mais pas dérivable en 0.
2. Ne pas confondre l'implication "f est dérivable $\Longrightarrow$ f est continue", et "f' est continue". En effet, une fonction peut être dérivable sans que sa dérivée soit continue, comme le prouve l'exemple de la fonction
$$x \longmapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
pour $x \neq 0$, et 0 en 0. Son taux d'accroissement en 0 vaut
$$x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
qui tend vers 1 en 0, donc cette fonction est dérivable en 0 et sa dérivée en 0 vaut 1. Par contre, pour $x \neq 0$, la dérivée vaut
$$2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right),$$
qui n'admet pas de limite en 0, donc la dérivée n'est pas continue en 0.

Proposition 1.4 (Sommes et produits de dérivées)

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et $f, g : I \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en $a \in I$.

1. Alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$. En particulier, si f et g sont dérivables sur I, alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

2. Le produit fg est dérivable en a et on a $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$. En particulier, si f et g sont dérivable sur I, on a
$$(fg)' = f'g + fg'.$$

2 Dérivées d'ordre supérieur

Définition 2.1 (Dérivée n-ème)

On définit par récurrence sur n, si elle existe, la *dérivée $n^{\text{ième}}$ de f* par

$$f^{(0)} = f \quad \text{et} \quad f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)',$$

et on dira que la fonction f est n-fois dérivable si $f^{(n)}$ existe.

Définition 2.2 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$)

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si elle est n-fois dérivable sur I, et si $f^{(n)}$ est continue sur I.

2. On note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

3. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si elle est dérivable à tout ordre.

4. On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions dérivables à tout ordre sur I.

Remarques.

1. Plus généralement, si J est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (souvent un intervalle de $\mathbb{R}$), on note $\mathcal{C}^n(I, J)$ l'ensemble des fonctions $I \longmapsto J$ n-fois dérivables, à dérivée n-ème continue.
2. Rappelons que, par convention, $\mathcal{C}^0(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I.
3. $\mathcal{C}^1(I)$ est donc l'ensemble des fonctions dérivables à dérivée continue sur I.
4. Attention : on peut être de classe $\mathcal{C}^n$ sans être de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
5. Ne confondez pas "de classe $\mathcal{C}^n$" et "n-fois dérivable".

Proposition 2.3

Soient $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant n$. Alors $\mathcal{C}^n(I) \subset \mathcal{C}^p(I)$.

Proposition 2.4

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction n-fois dérivable sur I. Alors $f \in \mathcal{C}^p(I)$ pour tout $p < n$.

Proposition 2.5

On a $\mathcal{C}^\infty(I) = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I)$.

Proposition 2.6

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction dérivable sur I. Alors

$$f \in \mathcal{C}^n(I) \iff f' \in \mathcal{C}^{n-1}(I).$$

Proposition 2.7 (Sommes et produits)

Soient f et g deux fonctions n-fois dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^n$) sur I, à valeurs réelles. Le produit et les combinaisons linéaires de f et g sont n-fois dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^n$) sur I, et on a (pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$),

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)},$$

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad \text{(Formule de Leibniz).}$$

Remarque.

L'ensemble $\mathcal{C}^n(I)$ est donc un sous-anneau de $(\mathbb{R}^I, +, \times)$.

Proposition 2.8

Soient $n, p \in \mathbb{N}$.

1. La fonction $x \longmapsto x^p$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\dfrac{\mathrm{d}^n[x^p]}{\mathrm{d}x^n} = \begin{cases} \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n} & \text{si } n \leqslant p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

2. La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée d'ordre n est

$$x \longmapsto (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

3 Quotient, composée, fonction réciproque

3.1 Quotient

Proposition 3.1

Soit $f : I \longmapsto \mathbb{R}$. Si f ne s'annule pas sur I et est dérivable en $a \in I$, alors $1/f$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{(f(a))^2}.$$

Corollaire 3.2

Soit $f : I \longmapsto \mathbb{R}$.

1. Si f ne s'annule pas sur I et est dérivable sur I, alors $1/f$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

2. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et ne s'annule pas sur I, alors $1/f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Corollaire 3.3

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I (resp. de classe $\mathcal{C}^n$ sur I), telles que g ne s'annule pas sur I. Alors f/g est dérivable sur I (resp. est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I), et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

3.2 Composée

Proposition 3.4

Soient I, J des intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow J$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Si f est dérivable en a et g en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

En particulier, si f est dérivable sur I et g sur J, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'.$$

Proposition 3.5

En gardant les notations de la proposition 3.4, si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ et $g \in \mathcal{C}^n(J)$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

3.3 Fonction réciproque

Proposition 3.6

Si f est continue sur I et bijective de I sur $J = f(I)$, dérivable en $a \in I$, et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et on a

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

En particulier, si f et dérivable sur I et si f' ne s'annule pas, alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Corollaire 3.7

Si f est dérivable sur I et bijective de I sur $J = f(I)$, alors sa fonction réciproque f^{-1} est dérivable en tout $y \in J \setminus \{f(x) \mid x \in I \text{ et } f'(x) = 0\}$.

Proposition 3.8

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ $(n > 0)$ sur I et si sa dérivée ne s'annule pas, alors $f : I \longrightarrow f(I)$ est bijective et f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $f(I)$.

Remarque.

Une telle fonction s'appelle un $\mathcal{C}^n$-difféomorphisme.

Méthode 3.9

Pour montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^n$, on procède en général en invoquant les thorèmes généraux (somme, produit, quotient dont le dénominateur ne s'annule pas, composée (vérifiez qu'elle est définie), et éventuellement réciproque si la fonction est bijective et que sa dérivée ne s'annule pas.

Sinon, on peut procéder par récurrence.

Dans le cas $\mathcal{C}^\infty$, on peut essayer de trouver une relation de récurrence entre la fonction et certaines de ses dérivées.

4 Théorèmes des fonctions dérivables

Dans tout ce paragraphe, les fonctions seront à valeurs réelles. **Les résultats de ce paragraphe sont faux pour les fonctions à valeurs complexes.**

4.1 Théorème de Rolle

Proposition 4.1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, et $a \in I$ un point qui n'est pas une extrémité de I. Si f admet un extremum en a, alors $f'(a) = 0$.

Remarques.

1. Un tel point a est un point critique de la fonction f.
2. La réciproque est fausse, comme le prouve l'exemple de la fonction $x \longmapsto x^3$ en 0.
3. Le résultat est faux si a est une extrémité, comme le prouve l'exemple de la fonction $x \longmapsto x$ sur l'intervalle $[0, 1[$, qui admet un minimum en 0.
4.

Méthode 4.2 (Recherche des extremums)

Pour déterminer les extremums d'une fonction dérivable sur un intervalle I, on détermine d'abord les candidats : éventuellement les extrémités de I, ainsi que les points critiques. Il faut ensuite vérifier lesquels des points critiques sont effectivement des extremums. On étudie la fonction, on dresse son tableau de variation, et on constate que ce sont les points critiques où la dérivée change de signe.

Théorème 4.3 (Théorème de Rolle)

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b)$ ($a < b \in \mathbb{R}$). Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque.

Ce théorème est faux pour les fonctions à valeurs complexes. En effet, la fonction $x \longmapsto e^{ix}$ a même valeur en 0 et en 2π, mais sa dérivée ne s'annule jamais. Ceci est dû au fait que dans $\mathbb{C}$ on peut "tourner autout de 0". Physiquement, dans le plan, on peut faire revenir au point de départ sans que la vitesse s'annule.

Corollaire 4.4

1. Soit f dérivable sur $[a, b]$ avec $f(a) = f(b)$. Alors f' s'annule sur $]a, b[$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^p([a, b])$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ avec $f(a) = f(b)$. Alors f' s'annule sur $]a, b[$.

Remarque.

4.2 Égalité des accroissements finis

Théorème 4.5 (Égalité des accroissements finis)

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \quad \text{ou encore tel que} \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Définition 4.6

Une fonction $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ est lipschitzienne s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall\ (x, y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

Plus précisément, on dit que la fonction est k-lipschitzienne.

Proposition 4.7

Une fonction lipschitzienne est continue.

Corollaire 4.8 (Inégalité des accroissements finis)

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, telle qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\ x \in]a, b[,\ m \leqslant f'(x) \leqslant M.$$

Alors

$$\forall\ x, y \in [a, b],\ x \leqslant y \Longrightarrow\ m(y - x) \leqslant f(y) - f(x) \leqslant M(y - x).$$

En particulier, si $|f'(x)| \leqslant k$ pour tout $x \in]a, b[$, on a

$$\forall\ x, y \in\ [a, b],\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|,$$

i.e. f est k-lipschitzienne sur $[a, b]$.

Proposition 4.9

Soit f une fonction dérivable et lipschitzienne sur un intervalle I. Alors f' est bornée.

Proposition 4.10

Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment est lipschtizienne.

Méthode 4.11

Deux cas particuliers très important où on peut appliquer le théorème de Rolle, l'égalité et l'inégalité des accroissements finis :

1. Si f est dérivable sur un intervalle I et si $a, b \in I$, alors f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ et dérivable sur l'intérieur $]a, b[$.

2. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I, elle est continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I, et en particulier, si $a, b \in I$, f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur l'intérieur $]a, b[$.

5 Applications des égalités et inégalités des accroissements finis

5.1 Dérivabilité et monotonie

Rappel : Soit I un intervalle d'extrémités $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a \leqslant b$. L'intérieur de I est l'intervalle $]a, b[$.

Proposition 5.1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur l'intérieur de I. Alors f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$ (resp. $f' \leqslant 0$) sur l'intérieur de I, et f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur l'intérieur de I.

Remarque.

Attention : ce résultat n'est valable que sur un intervalle. Rappelons que la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \longmapsto \frac{|x|}{x}$ est dérivable, a une dérivée nulle, mais n'est pas constante.

Proposition 5.2 (Fonctions strictement monotones, condition suffisante 1)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur l'intérieur de I. Si $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) sur l'intérieur de I, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I.

Théorème 5.3 (Fonctions strictement monotones, conditions nécessaires et suffisantes)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur l'intérieur de I. Alors f est strictement monotone sur I si et seulement si

1. f' est de signe constant sur l'intérieur de I.

2. Si J est un intervalle où f' est nulle, alors J est réduit à un point, ou encore si $x < y$ et $f'(x) = f'(y) = 0$, il existe $x_0 \in]x, y[$ tel que $f'(x_0) \neq 0$.

Corollaire 5.4 (Fonctions strictement monotones, condition suffisante 2)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur l'intérieur de I. Si $f' \geqslant 0$ (resp. $f' \leqslant 0$) sur l'intérieur de I, et que f' ne s'annule qu'un nombre fini de points, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I.

5.2 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 5.5 (Théorème de la limite de la dérivée)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $c \in I$, et f une fonction continue sur I, et dérivable sur $I \setminus \{c\}$.

1. Si f' admet une limite finie ℓ en c, alors f est dérivable en c avec $f'(c) = \ell$, et f' est continue en c. En particulier, si f est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{c\}$, alors elle l'est sur I.

2. Si f' admet une limite infinie en c, la courbe représentative de f admet une tangente verticale au point d'abscisse c.

Remarques.

1. La réciproque est fausse : la fonction $x \longmapsto x^2 \sin(1/x)$ est dérivable en 0 mais sa dérivée n'admet pas de limite en 0.
2. La continuité de f sur tout l'intervalle I est essentielle.
3. Ce théorème reste vrai pour les fonctions à valeurs complexes. En effet, il suffit de l'appliquer séparément aux parties réelle et imaginaire.
4. On peut évidemment obtenir un résultat similaire pour les dérivées à gauche et à droite en c, en restreignant la fonction à $I \cap]-\infty, c]$ ou à $I \cap [c, +\infty[$.

Théorème 5.6 (Théorème de classe $\mathcal{C}^k$ par prolongement)

Soit $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$, et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I \setminus \{a\}$, telle que pour tout $k \in \{0 \dots, n\}$, $f^{(k)}$ possède une limite finie en a. Alors f est prolongeable par continuité en a, et son prolongement $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\tilde{f}^{(k)}(a) = \lim\limits_{x \to a} f^{(k)}(x)$.

5.3 Application aux suites récurrentes d'ordre 1

On considère dans ce § une fonction dérivable $f : I \longrightarrow I$ où I est un intervalle **fermé** de $\mathbb{R}$, (*i.e.* un segment ou un intervalle du type $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, a]$), et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Rappelons que dans le chapitre 12, §7, on a déjà étudié ce type de suite. On a en particulier montré que si f est croissante, la suite (u_n) est monotone, si f est décroissante, les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, et que si (u_n) converge, sa limite ℓ est un point fixe de f, *i.e.*

$$f(\ell) = \ell.$$

Rappelons également que si I est majoré ou minoré, il en est de même de la suite (u_n).

Proposition 5.7

Soi ℓ un point fixe de f.

1. S'il existe $k<1$ tel que
$$\forall\, x \in I,\ |f(x)-\ell| \leqslant k|x-\ell|,$$
la suite (u_n) est convergente vers ℓ.

2. Si la fonction f est k-lipschitzienne sur I avec $k<1$, la suite (u_n) converge vers ℓ.

3. Si la fonction f admet une dérivée majorée en valeur absolue sur I par $k<1$, la suite (u_n) converge vers ℓ.

Remarque.

Dans la situation de la proposition précédente, si f admet un point fixe, celui-ci est unique, car si ℓ_1, ℓ_2 sont des points fixes de f, on a
$$|\ell_1-\ell_2| = |f(\ell_1)-\ell_2| \leqslant k|\ell_1-\ell_2|,$$
et comme $0<k<1$, on a $\ell_1=\ell_2$.

6 Fonctions convexes

Dans tout ce §, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, et f une fonction $I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Définition 6.1 (Fonction convexe)

1. La fonction f est *convexe* sur I si
$$\forall\, x, y \in I,\ \forall\, \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),$$
ce qui est équivalent à
$$\forall\, x, y \in I,\ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+,\ \lambda+\mu=1,\ f(\lambda x+\mu y) \leqslant \lambda f(x)+\mu f(y).$$

2. La fonction f est *concave* si $-f$ est convexe, *i.e.*
$$\forall\, x, y \in I,\ \forall\, \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x+(1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),$$
ce qui est équivalent à
$$\forall\, x, y \in I,\ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+,\ \lambda+\mu=1,\ f(\lambda x+\mu y) \geqslant \lambda f(x)+\mu f(y).$$

Proposition 6.2 (Inégalité de convexité)

La fonction f est convexe si et seulement si pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, on a
$$x_1, \ldots, x_p \in I \implies f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i).$$

Proposition 6.3

Une fonction f est convexe sur un intervalle I si et seulement si

$$\forall\, x, a, y \in I,\ x < a < y \Longrightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(y) - f(a)}{y - a}.$$

Proposition 6.4 (Fonctions convexes et dérivation)

Si $I = (a, b)$ et f est continue sur I et dérivable sur $]a, b[$, alors f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur $]a, b[$.

Proposition 6.5

Si $I = (a, b)$ et f est continue sur I et dérivable sur $]a, b[$, f est convexe si et seulement si elle est au-dessus de ses tangentes, *i.e.*

$$\forall\, x \in I,\ x_0 \in]a, b[,\ f(x) \geqslant f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0).$$

Corollaire 6.6 (Dérivée seconde des fonctions convexes)

Soit f continue sur $I = (a, b)$ et deux fois dérivables sur $]a, b[$. Alors f est convexe sur I si et seulement si $f'' \geqslant 0$.

7 Fonctions à valeurs complexes

On considère dans ce paragraphe des fonctions $I \longmapsto \mathbb{C}$. Les définitions sont les mêmes que pour les fonctions à valeurs réelles. Il s'agit juste de remplacer la valeur absolue par le module. Voici quelques particularités :

- Le théorème de Rolle, donc le théorème des accroissements finis, ne sont plus valables. Dans un plan, on peut en effet revenir à son point de départ sans annuler sa vitesse, ce qui n'est pas possible sur une droite.
- L'inégalité des accroissements finis est valable pour les fonctions de classer $\mathcal{C}^1$ (*cf.* ci-dessous).
- Le théorème de la limite de la dérivée reste valable.

Définition 7.1 (Dérivée)

Soit $f : I \longmapsto \mathbb{C}$ et $a \in I$.

1. La fonction f est *dérivable* en a (resp. *dérivable à gauche*, *dérivable à droite* en a) si le taux d'accroissement de f en a

$$\begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$$

admet une limite finie en a (resp. une limite finie à gauche, à droite en a). On note

$$f'(a) \quad (\text{resp.} \quad f'_g(a), \quad f'_d(a))$$

ces limites.

2. La fonction f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. La *dérivée* de f est la fonction

$$\begin{array}{cccc} f' & I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & f'(x). \end{array}$$

Proposition 7.2

Soit $f : I \longmapsto \mathbb{C}$. Alors f est dérivable sur I si et seulement si ses parties réelles et imaginaires le sont, et alors
$$f' = \big(\mathrm{Re}(f)\big)' + i\big(\mathrm{Im}(f)\big)'.$$

La définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ est la même, et comme dans $\mathbb{R}$, les sommes, produits, composées de fonctions dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^n$ sont dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^n$. La formule de Leibniz reste valable. La règle pour les inverses et les quotients est la même.

Théorème 7.3

Soit $f : I \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $|f'|$ soit majorée par $M > 0$. Alors,
$$\forall\ (x, y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|.$$

Remarque.

Cas particulier important : si I est un segment, la fonction $|f'|$ est une fonction à valeurs réelles continue sur le segment I, donc bornée.