Chapitre 20

Développements limités

On considère dans ce chapitre un entier $n \in \mathbb{N}$, un intervalle I, $x_0 \in I$ et une fonction f à valeurs réelles définie sur I sauf peut-être en $x_0 \in I$. On note D_f son domaine de définition.

1 Définitions, premières propriétés

1.1 Développement limité en x_0

Définition 1.1

1. La fonction f admet un développement limité à l'ordre n en 0 (noté $DL_n(0)$) s'il existe des réels $a_0, \dots, a_n$, et une fonction $\varepsilon : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $\varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ et
$$\forall\, x \in D_f,\ f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + x^n \varepsilon(x),$$
ce qui s'écrit aussi
$$\forall\, x \in D_f,\ f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + o(x^n).$$

2. La fonction f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 (noté $DL_n(x_0)$) s'il existe des réels $a_0, \dots, a_n$, et une fonction $\varepsilon : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ et
$$\forall\, x \in D_f,\ f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x - x_0)^i + (x - x_0)^n \varepsilon(x),$$
ce qui s'écrit aussi
$$\forall\, x \in D_f,\ f(x) \underset{x \to x_0}{=} \sum_{i=0}^{n} a_i (x - x_0)^i + o(x - x_0)^n.$$

Remarques.

1. L'existence d'un $DL_n(0)$ est équivalente à l'existence de $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k}{x^n} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

2. On omettra l'indice x_0 en-dessous de $o(x-x_0)^n$ pour alléger les notations. Il n'y a de tout façon pas d'ambiguïté à partir du moment où on a précisé "développement limité en x_0".
3. On rappelle que $o(x-x_0)^n$ est une notatition qui signifie que

$$o(x-x_0)^n = (x-x_0)^n \varepsilon(x)$$

où ε est une fonction tendant vers 0 en x_0 (donc continue en x_0 si $x_0 \in D_f$ avec $\varepsilon(x_0) = 0$) . Il faut toujours revenir à cette écriture dès que la moindre difficulté se présente. Il est vivement conseillé de refaire les démonstrations avec cette écriture.
4. On rappelle que $(x-x_0)^n o(x-x_0)^m = o(x-x_0)^{n+m}$.
5. Rapellons également que l'écriture $f(x) \underset{x \to x_0}{=} o(1)$ signifie $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$.

Proposition 1.2 (Unicité d'un développement limité)

1. Si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0, celui-ci est unique, *i.e.* s'il existe des réels $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ et deux fonctions $\varepsilon_k : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $(k = 1, 2)$tels que $\varepsilon_k(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ et tels que pour tout $x \in I$, on ait

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + (x-x_0)^n \varepsilon_1(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-x_0)^k + (x-x_0)^n \varepsilon_2(x),$$

alors $a_k = b_k$ pour tout $k = 0, \dots, n$.

2. En particulier, on a

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + (x-x_0)^n \varepsilon_1(x) = (x-x_0)^n \varepsilon_2(x) \iff a_0 = \dots = a_n = 0.$$

Définition 1.3 (Partie régulière)

Si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0

$$\forall\, x \in D_f,\ f(x) \underset{x \to x_0}{=} \sum_{i=0}^{n} a_i (x-x_0)^i + o(x-x_0)^n,$$

le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k (X-x_0)^k$ est la *partie régulière* du développement limité .

Proposition 1.4 (Changement de variable)

Soit g la fonction définie sur $\{h \in \mathbb{R} \mid h + x_0 \in \mathcal{D}_f\}$ par $g(h) = f(h+x_0)$. Alors f admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ si et seulement si g admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, et de plus, on a

$$\forall\, h \in \mathcal{D}_g,\ g(h) \underset{h \to 0}{=} \sum_{i=0}^{n} a_i h^i + o(h^n) \iff \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) \underset{x \to x_0}{=} \sum_{i=0}^{n} a_i (x-x_0)^i + o(x-x_0)^n.$$

Remarque.
C'est pourquoi les énoncés concernant les développements limités sont souvent donnés uniquement en 0. Un simple changement de variable donne le résultat partout.

Définition 1.5 (Forme normalisée)

Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en x_0

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x-x_0)^i + o(x-x_0)^n,$$

de partie régulière non nulle. Soit p le plus petit entier tel que $a_p \neq 0$. La forme normalisée du développement limité est

$$\begin{aligned} f(x) = (x-x_0)^p &\left(\sum_{i=p}^{n} a_i(x-x_0)^{i-p} + o(x-x_0)^{n-p}\right) \\ &= (x-x_0)^p\Big(a_p + a_{p+1}(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^{n-p} + o(x-x_0)^{n-p}\Big). \end{aligned}$$

Le cas particulier $x_0 = 0$ s'écrit

$$f(x) = x^p\left(\sum_{i=p}^{n} a_i x^{i-p} + o(x^{n-p})\right) = x^p\Big(a_p + a_{p+1}x + \cdots + a_n x^{n-p} + o(x^{n-p})\Big).$$

Proposition 1.6 (Troncature)

Si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o(x-x_0)^n,$$

elle en admet un à tout ordre $p \leqslant n$ qui est

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k(x-x_0)^k + o(x-x_0)^p$$

(obtenu par *troncature* à l'ordre p).

Remarque.
Cette démonstration rappelle que si $k > n$, on a $(x-x_0)^k = o(x-x_0)^n$.

Proposition 1.7 (Développement limité et équivalent)

Si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0

$$f(x) = \sum_{k=p}^{n} a_k(x-x_0)^k + o(x-x_0)^n$$

avec $a_p \neq 0$ ($p \leqslant n$), alors on a $f(x) \underset{x_0}{\sim} a_p(x-x_0)^p$. De plus, le signe de f au voisinage de x_0 est donné par le signe de $a_p(x-x_0)^p$.

Méthode 1.8

On utilise les développements limités pour déterminer un équivalent quand les techniques usuelles sur les équivalents ne fonctionnnent pas. C'est très fréquent pour le cas des sommes. Mais en général, on utilise les développements limités en dernier ressort, et que dans le facteur qui pose problème.

1.2 Développement limités à l'ordre 0 et 1

Proposition 1.9 (Développement limité à l'ordre 0 et limite/continuité)

1. La fonction f admet un développement limité à l'ordre 0 en x_0 qui est $f(x) \underset{x\to x_0}{=} a_0 + o(1)$ si et seulement si $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} a_0$.

2. Si f est définie en x_0, elle admet un développement limité à l'ordre 0 en x_0 $f(x) = a_0 + o(1)$ si et seulement si elle est continue en x_0 et $f(x_0) = a_0$.

Corollaire 1.10

Si f admet un développement limité en x_0, alors f est soit continue en x_0, soit prolongeable par continuité en x_0.

Remarque.

Cette proposition nous permet de ne considérer que des fonctions **définies et continues en** x_0 (quitte à les prolonger par continuité). On aura donc $D_f = I$ dans toute la suite du chapitre.

Proposition 1.11 (Développement limité à l'ordre 1 et dérivabilité)

La fonction f admet un $\mathrm{DL}_1(x_0)$ qui est $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0)$ si et seulement si elle est dérivable en x_0, $a_0 = f(x_0)$ et $a_1 = f'(x_0)$.

Proposition 1.12 (DL et continuité/déribabilité)

Si f admet un développement limité à l'ordre $n \geqslant 1$ en x_0 qui est $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o(x-x_0)^n$, alors f est continue et dérivable en x_0, $a_0 = f(x_0)$ et $a_1 = f'(x_0)$.

Remarques.

1. Cette proposition nous permet de ne considérer que des fonctions **définies et continues en** x_0 (quitte à les prolonger par continuité). On aura donc $D_f = I$ dans toute la suite du chapitre, et le premier terme a_0 d'un développement limité en x_0 est
$$a_0 = f(x_0),$$
et qu'en cas de DL_1, le coefficient a_1 devant $x - x_0$ n'est autre que $f'(x_0)$.
2. Attention, à partir de l'ordre 2, rien ne va plus. Par exemple, la fonction
$$x \longmapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 puisque

$$x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = o(x^2).$$

Mais pour $x \neq 0$, sa dérivée vaut

$$3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

qui n'admet pas de limite en 0, donc n'est pas continue en 0, donc n'est pas dérivable en 0, *i.e.* f n'est pas deux fois dérivable en 0.

2 Propriétés : somme, produit, parité

Proposition 2.1 (Parité)

Si f est paire (resp. impaire) et admet un développement limité en 0, sa partie régulière est paire (resp. impaire).

Remarque.

Si f est une fonction paire, le développement limité de f en 0 à l'ordre $2n$ donne immédiatement celui à l'ordre $2n+1$, puisque le coefficient devant x^{2n+1} est nul. De même pour les fonctions impaires et le passage de $2n-1$ à $2n$.

Remarque.

Rappellons qu'au voisinage de 0, x^n est négligeable devant x^m si et seulement si $n > m$, et que

$$o(x^n) + o(x^m) = o(x^{\min(n,m)}), \quad x^n \times o(x^m) = o(x^{n+m}), \quad o(x^n) \times o(x^m) = o(x^{n+m}).$$

En résumé, on garde "le plus petit des petits o".

Proposition 2.2 (Somme, produit)

Soient f et g définies sur I admettant chacune un $\mathrm{DL}_n(x_0)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o(x-x_0)^n \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k + o(x-x_0)^n.$$

1. La fonction $f+g$ admet un développement limité à l'ordre n en x_0 qui est

$$f(x)+g(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k+b_k)(x-x_0)^k + o(x-x_0)^n.$$

2. La fonction fg admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ qui est

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) (x - x_0)^k + o(x - x_0)^n,$$

i.e. c'est le produit des parties régulières des développements limités de f et g tronqué à l'ordre n.

3. Si $s \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \longmapsto (f(x))^s$ admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ qui est

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k \right)^s + o(x - x_0)^n,$$

où on tronque la puissance s-ème de la partie régulière à l'ordre n.

Remarques.

1. On tronque **toujours** un produit au fur et à mesure.
2. Notez bien que si f admet un développement limité d'ordre n et g un développement limité d'ordre m, la somme n'admet qu'un développement limité d'ordre $\min(n, m)$, et on tronque toujours les DL avant de faire la somme. Par exemple, la somme de $1 + x - x^2/3 + 6x^3 + o(x^3)$ et de $x^2 + o(x^4)$ donne un DL à l'ordre 3 seulement.
3. Pour le produit la situation est différente en utilisant la forme normalisée, *cf.* les exemples et la méthode 2.3.

Méthode 2.3 (Optimisation des calculs pour le produit)

On a vu dans les exemples précédents qu'il est plus efficace d'utiliser la forme normalisée des développements limités. Regardons les trois cas suivants :

— Un produit du type $\big(1 + \cdots + o(x^4)\big)\big(3 + \cdots + o(x^3)\big)$ donne un développement limité à l'ordre 3 seulement. Par exemple $(2 - x + x^3 + 2x^4 + o(x^4))(-1 + x^2 + x^2 + o(x^3))$

— Un produit du type $\big(x + \cdots + o(x^4)\big)\big(3 + \cdots + o(x^3)\big)$ donne un développement limité à l'ordre 4. Par exemple $(-x + x^3 + 2x^4 + o(x^4))(-1 + x^2 + x^2 + o(x^3))$.

— Un produit du type

$$\big(2x^3 + \cdots + o(x^8)\big)\big(- x^4 + \cdots + o(x^{10})\big) = x^7\big(2 + \cdots + o(x^5)\big)\big(- 1 + \cdots + o(x^6)\big)$$

donne un développement limité à l'ordre 7+5=12 (plutôt que 8 en multipliant simplement).

Pour résumer, on met les développements limités sous forme normalisée, et on multiplie entre eux les développements limités qui restent grâce à la proposition 2.2.

Remarque.

Cette méthode est particulièrement adaptée au développement limité de $(f(x))^s$ si la valuation de la partie régulière est > 0.

3 Quotients de développements limités

Proposition 3.1

Si $f(0)=0$ et f admet un développement limité à l'ordre n en 0

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x^k + o(x^n),$$

la fonction

$$x \longmapsto \frac{1}{1-f(x)}$$

admet un développement limité à l'ordre n en 0 qui est

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-f(x)} &= 1+\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x^k\right)^j + o(x^n)\\
&= 1+\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x^k\right)+\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x^k\right)^2+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x^k\right)^n + o(x^n)\\
&= 1+\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n-j+1} a_k x^k\right)^j + o(x^n)\\
&= 1+(a_1x+\cdots+a_nx^n)+\left(a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}\right)^2+\cdots+\left(a_1x+a_2x^2\right)^{n-1}+(a_1x)^n+o(x^n),
\end{aligned}$$

où les puissances de x sont tronquées à l'ordre n.

Remarques.

1. Il ne faut jamais faire les calculs complètement, mais bien penser à tronquer à l'ordre n au fur et à mesure.
2. On peut remplacer dans l'énoncé la phrase "Si $f(0)=0$ et f admet un développement limité à l'ordre n en 0" par "Si $f(x_0)=0$ et f admet un développement limité à l'ordre n en x_0" et alors au voisinage de x_0 on a

$$\frac{1}{1-f(x)} = 1+\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k (x-x_0)^k\right)^j + o(x-x_0)^n.$$

Méthode 3.2 (Quotient)

Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0 et si $f(0)\neq 0$, alors $1/f$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 qui est obtenu à l'aide du calcul

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(0)}\frac{1}{\frac{f(x)}{f(0)}} = \frac{1}{f(0)}\frac{1}{1-\left(1-\frac{f(x)}{f(0)}\right)}.$$

En posant $h(x)=1-\frac{f(x)}{f(0)}$, on a $h(0)=0$, et on est ramené à la proposition 3.1.

Par produit, si un fonction g admet un développement limité à l'ordre n en 0, la fonction g/f également.

4 Composition des développements limités

Nous nous contenterons dans ce paragraphe d'exemples de composition de développements limités en 0, avec juste un énoncé admis :

Proposition 4.1

Soient f et g deux fonctions admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$ ($n \in \mathbb{N}$) et telles que $g(0) = 0$. Alors $f \circ g$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ obtenu en composant les parties régulières des $\mathrm{DL}_n(0)$ de f et g en tranquant à l'ordre n.

5 Développements limités et dérivation

5.1 Intégration d'un développement limité

Théorème 5.1

Si f est continue sur I et admet un développement limité à l'ordre n en x_0

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + o(x - x_0)^n,$$

toute primitive F de f admet un développement limité limité à l'ordre $n + 1$ en x_0

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x - x_0)^{k+1}}{k + 1} + o(x - x_0)^{n+1}$$

obtenu par intégration de la partie régulière du développement limité de f.

Remarque.

Attention, la réciproque est fausse. Si une fonction f est dérivable et admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en x_0, sa dérivée n'admet pas nécessairement de développement limité . Par exemple, la fonction

$$x \longmapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 puisque

$$x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = o(x^2).$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ évidemment, mais également en 0 puisque le taux d'accroissement en 0 vaut $x^2 \sin(1/x^2)$ qui tend vers 0. Or, pour $x \neq 0$, sa dérivée vaut

$$3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

qui n'est pas continue en 0, donc f' n'admet même pas de développement limité à l'odre 0 (proposition 1.9).

Méthode 5.2

Si f est une fonction de classe C^1 dont la dérivée f' admet un développement limité d'ordre n en x_0, par intégration, f en admet un à l'ordre $n + 1$ en x_0.

5.2 Formule de Taylor-Young

Théorème 5.3 (Formule de Taylor-Young)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de n-fois dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 qui est

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o(x-x_0)^n \quad \text{ou encore} \quad f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + \underset{h=0}{o}(h)^n.$$

Remarque.

Cette proposition est peu utilisée en pratique. On s'en sert pour déterminer les développements limités des fonctions usuelles, puis on utilise plutôt les résultats sur les sommes, produits, quotients et composées de développements limités pour les calculs effectifs, *cf.* les exercices.

5.3 Développements limités des fonctions usuelles

Voici les développements limités usuels qu'il faut connaître ou savoir retrouver. On les obtient à l'aide de la proposition 5.1 ou du théorème 5.3. Ils sont tous en 0. Ils sont classés par "origine". Ceux à connaître sans réfléchir sont signalés par une étoile $\star$.

$$(\star)\quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

$$\text{d'où}\quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

$$\text{d'où}\quad (\star)\quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$(\star)\quad \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$(\star)\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\text{partie paire}\quad (\star)\quad \mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\text{et impaire}\quad (\star)\quad \mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\text{puis}\quad (\star)\quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$(\star)\quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\text{et par quotient}\quad (\star)\quad \mathrm{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$$(\star)\quad \tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$$(\star)\quad (1+x)^a = 1 + ax + a(a-1)\frac{x^2}{2} + a(a-1)(a-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots + a(a-1)\cdots(a-n)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1})$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{n} a(a-1)\cdots(a-k)\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + o(x^{n+1})$$

$$\text{cas particuliers :}\quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + o(x^5)$$

$$\text{d'où}\quad \arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4),\quad \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

6 Applications

6.1 Position par rapport à une tangente

On considère une fonction f définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, dérivable en x_0, à valeurs réelles.

Proposition 6.1

Si f admet un développement limité à l'ordre $p \geqslant 2$ en x_0

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p + o(x - x_0)^p, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R},\ a_p \neq 0,$$

la position de la courbe représentative de f par rapport à la tangente est donnée au voisinage de x_0 par le signe de $a_p(x - x_0)^p$:

$$\begin{aligned} &\text{Si } a_p(x - x_0)^p > 0, (x, f(x)) \text{ est au-dessus de la tangente,}\\ &\text{Si } a_p(x - x_0)^p < 0, (x, f(x)) \text{ est en-dessous de la tangente.} \end{aligned}$$

6.2 Étude d'un extremum local

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. On sait que si f admet un extremum en $x_0 \in I$, alors $f'(x_0) = 0$. Mais la réciproque est fausse (considérez $x \longmapsto x^3$ avec $x_0 = 0$). On peut étudier une réciproque de la façon suivante :

Proposition 6.2

Si $f'(x_0) = 0$ et si f admet un développement limité à l'ordre $p \geqslant 2$ en $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f(x) = a_0 + a_p(x - x_0)^p + o(x - x_0)^P, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R},\ a_p \neq 0,$$

alors

1. Si p est impair, $f(x_0)$ n'est pas un extremum.
2. Si p est pair, $f(x_0)$ est un maximum local (resp. minimum local) si $a_p < 0$ (resp. $a_p > 0$).

6.3 Étude d'asymptotes

On considère dans ce paragraphe une fonction f définie au voisinage de $\pm\infty$ admettant une limite en $\pm\infty$. Le but est d'étudier l'existence eventuelle d'asymptotes, ainsi que le cas échéant la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Proposition 6.3

Si pour $u > 0$ (resp. $u < 0$) on a au voisinage de 0^+ (resp. 0^-)

$$uf\left(\frac{1}{u}\right) = a + bu + cu^p + \underset{0}{o}(u^p)$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $p \geqslant 2$, on a au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$)

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x^{p-1}} + \underset{\infty}{o}\left(\frac{1}{x^{p-1}}\right),$$

et la fonction f admet en $+\infty$ (resp. $-\infty$) une asymptote d'équation

$$y = ax + b,$$

et la position de la courbe représentative de f par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de c/x^{p-1}.

7 Développements asymptotiques

Les calculs précédents pour l'étude des asymptotes s'appellent des développements asymptotiques : on fait un "développement limité " (éventuellement en $\pm\infty$), en s'autorisant en "partie régulière" des fonctions autres que des puissances de x : par exemple $g(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{x}{2} + \ln(x) - \frac{1}{4} + \frac{1}{48x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Il s'agit d'écrire au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ une fonction comme somme de fonctions négligeables les unes devant les autres : la précision augmente au fur et à mesure des additions.

Voici des exemples :

1. Développement asymptotique de $f : x \longmapsto (ex)^x$ au voisinage de 0. Pour $x > 0$, on a $f(x) = e^x e^{x\ln(x)}$. Or, au voisinage de 0, on a

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u),$$

où $\varepsilon(u) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc avec $u(x) = x\ln(x)$ qui tend vers 0 en 0, on a

$$e^{x\ln(x)} = 1 + x\ln(x) + \frac{1}{2}(x\ln(x))^2 + (x\ln(x))^2\varepsilon(x\ln(x)),$$

et donc

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right)\left(1 + x\ln(x) + \frac{1}{2}(x\ln(x))^2 + (x\ln(x))^2\varepsilon(x\ln(x))\right).$$

Or, au voisinage de 0, $x^2 = o(x^2\ln^2(x))$, donc la précision qu'on obtient est au maximum un "$o(x^2\ln^2(x))$" : quand on développe le produit ci-dessus, toutes les fonctions négligeables devant $x^2\ln^2(x)$ peuvent être supprimées (comme avec un tamis, les grains trop petits disparaissent). On obtient donc (attention, on est au voisinage de 0), en rangeant les fonctions dans l'ordre de négligeabilité, :

$$f(x) = 1 + x\ln(x) + x + \frac{1}{2}x^2\ln^2(x) + o(x^2\ln^2(x)).$$

Que peut-on en déduire ? Que $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$, et que le graphe de son prolongement par continuité en 0 admet une tangente verticale, puisque

$$\frac{f(x)-1}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty.$$

Enfin, le graphe de f est au-dessus de celui de $x \longmapsto 1 + x\ln(x)$ au voisinage de 0^+, car

$$f(x) - (1 + x\ln(x)) \underset{x\to 0^+}{\sim} x \geqslant 0.$$

2. Développement asymptotique d'une suite définie implicitement. Il faut retenir la méthode qui suit : on a une suite $(u_n)_n$ définie par une suite d'équations $(E_n)_n$. On cherche tout d'abord un équivalent a_n de u_n : on a $u_n = a_n + o(a_n)$. Puis, on réinjecte dans E_n pour obtenir un équivalent b_n de $u_n - a_n$. Cela donne $u_n - a_n = b_n + o(b_n)$, et ainsi de suite.

On l'applique à l'unique solution $u_n \in]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$ de l'équation $\tan(x) = x$.

— On a par le théorème d'encadrement que $u_n \sim n\pi$.
— Posons $v_n = u_n - n\pi$. On a alors $\tan(v_n) = \tan(u_n) = u_n$. Mais $v_n \in]-\pi/2, \pi/2[$, donc $v_n = \arctan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$, et $v_n \sim \frac{\pi}{2}$.
— On pose enfin $w_n = v_n - \frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors

$$w_n \sim \tan(w_n) = -\frac{1}{\tan(v_n)} = -\frac{1}{\tan(u_n)} \sim -\frac{1}{n\pi},$$

et finalement

$$u_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$