

1. Ecart normalisé:
$$Z = \frac{\left| \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} \right|}{\sqrt{v\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^2 + v\left(\frac{1}{\alpha_2}\right)^2}} \approx \frac{(206 - 150) \cdot 10^{-9}}{\sqrt{121 \cdot 10^{-18} + 9 \cdot 10^{-16}}} \quad \text{A.N.: } Z = 1,75$$

$Z < 2$ donc la théorie du modèle standard est valide

I) Principe de la mesure de la constante de structure fine α

2-a) Le modèle est semi-classique car:

- le modèle planétaire de la trajectoire s'appuie sur la mécanique classique
- l'idée de quantification du moment cinétique n'est pas classique, mais préfigure la mécanique quantique.

b) Théorème de la quantité de mouvement à l'électron: $m_e \vec{a} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{v}_n$

En projection selon \vec{v}_n : $m_e \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow m_e v^2 r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$

Or: $L = m_e v r = n \hbar \Rightarrow m \hbar v = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$

Donc: $v_m = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m \hbar}$ Puis: $v_m = \frac{\alpha c}{m}$

La vitesse maximale est atteinte pour $n=1$. Elle vaut: $v_1 = \alpha c$

On a: $\frac{v_1}{c} = \alpha \approx \frac{1}{137} \ll 1$ Il est légitime de considérer que l'électron est non relativiste

c)
$$E_m = \frac{1}{2} m_e v_m^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_m} = \frac{1}{2} m_e \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m \hbar} \right)^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{m_e v_m}{m \hbar} \quad \text{car } \frac{1}{r} = \frac{m_e v}{m \hbar}$$

$$= \frac{1}{2} m_e \frac{e^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 m^2} - m_e \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m \hbar} \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m \hbar}$$

$$= \frac{1}{2} m_e \frac{e^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 m^2} - m_e \frac{e^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 m^2}$$

donc: $E_m = - \frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 m^2}$

On a: $E_{m_2} - E_{m_1} = h\nu = \frac{h c}{\lambda}$ (relation de Planck-Einstein)

donc: $-\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \left(\frac{1}{m_2^2} - \frac{1}{m_1^2} \right) = \frac{h c}{\lambda}$

d'où: $\frac{1}{\lambda} = \frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{4\pi^2}{h c} \left(\frac{1}{m_1^2} - \frac{1}{m_2^2} \right) \Rightarrow R_\infty = \frac{m_e e^4}{8 \epsilon_0^2 c \hbar^3}$

3-a) On a: $\alpha^2 = \frac{e^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 c^2} = \frac{e^4}{4 \epsilon_0^2 \hbar^2 c^2} \quad \alpha = \frac{e^4}{4 \epsilon_0^2 c^2 \hbar^2} = 2 R_\infty \cdot \frac{1}{m_e} \cdot \frac{h}{c}$

Donc on a bien: $\alpha = \sqrt{\frac{2 R_\infty}{c} \frac{m}{m_e} \cdot \frac{h}{m}}$

b) $\alpha = \frac{2h}{c} R_\infty^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{m^{1/2}}$ donc: $\frac{v(\alpha)}{\alpha} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{v(R_\infty)}{R_\infty} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{v\left(\frac{m}{m_e}\right)}{\frac{m}{m_e}} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{v(m)}{m} \right)^2}$

Pas d'incertitude sur c et h car ce sont des constantes fondamentales fixées

On en déduit:
$$\frac{v(m)}{m} = \sqrt{4 \left(\frac{v(\alpha)}{\alpha} \right)^2 - \left(\frac{v(R_{\infty})}{R_{\infty}} \right)^2 - \left(\frac{v\left(\frac{m}{m_e}\right)}{\frac{m}{m_e}} \right)^2}$$
A.N: $\frac{v(m)}{m} = 1,5 \cdot 10^{-10}$

\uparrow $8 \cdot 10^{-11}$ \uparrow $2 \cdot 10^{-12}$ \uparrow $7 \cdot 10^{-11}$

4.a) Le photon doit avoir l'énergie $E_i - E_a$

b) état initial: l'atome au repos et le photon état final: l'atome excité

Conservation de l'énergie: $E_a + \hbar\omega = E_i + \frac{1}{2} m v_n^2$

Conservation de la quantité de mouvement: $\hbar\vec{k} = m\vec{v}_n$

c) On a: $E_a + \hbar kc = E_i + \frac{1}{2} m \left(\frac{\hbar k}{m} \right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{(\hbar k)^2}{m} - \hbar kc + E_i - E_a = 0$

Usuellement on néglige l'énergie cinétique de recul. C'est donc un terme faible. On peut négliger le terme $\frac{1}{2} \frac{(\hbar k)^2}{m}$ dans l'équation ci-dessus. Il reste: $-\hbar kc + E_i - E_a = 0$

Donc: $k = \frac{E_i - E_a}{\hbar c}$ Puis: $\|\vec{v}_n\| = \frac{\hbar k}{m} \Rightarrow \|\vec{v}_n\| = \frac{E_i - E_a}{m c}$

A.N: $a \rightarrow b$: $\|\vec{v}_n\| = 7 \cdot 10^{-8} \text{ m s}^{-1}$ $a \rightarrow c$: $\|\vec{v}_n\| = 7 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$

d) La transition $a \rightarrow c$ permet une meilleure séparation des fonctions d'onde et une meilleure sensibilité. Mais l'état c a une faible durée de vie. C'est l'inverse pour la transition $a \rightarrow b$.

5 - Pour la transition $a \rightarrow c$: $\|\vec{v}_n\| = \frac{\hbar k_1}{m}$ d'après 4.c)

Conservation de la quantité de mouvement selon Oz pour la transition $c \rightarrow b$:

$$m \|\vec{v}_n\| - \hbar k_z = -2\hbar k_z + m v_{n \text{ final}}$$

$$\Rightarrow v_{n \text{ final}} = \|\vec{v}_n\| + \frac{\hbar k_z}{m} \quad \text{or } k_1 \approx k_2 \text{ donc } \hbar k_z \approx \hbar k_1 \approx m \|\vec{v}_n\|$$

$$\Rightarrow v_{n \text{ final}} = 2 \|\vec{v}_n\|$$

La vitesse de recul finale est $2\vec{v}_n$. \vec{v}_n est associée à la transition $a \rightarrow c$

On a: $k = \frac{E_c - E_a}{\hbar c}$ A.N: $k = 10^7 \text{ m}^{-1}$

6.a) Equation de Schrödinger pour l'état $\Psi_1(\vec{r}, t) = a_1(t) \exp(j \frac{m\vec{v}_0 \cdot \vec{r}}{\hbar})$

$$\cdot - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi_1 + (E_a + E_{p,a}) \Psi_1 = j\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \quad (\text{énergie potentielle totale: } V = E_a + E_{p,a})$$

$$\cdot - \frac{\hbar^2}{2m} \left(j \frac{m\vec{v}_0}{\hbar} \right)^2 a_1(t) e^{j \frac{m\vec{v}_0 \cdot \vec{r}}{\hbar}} + (E_a + E_{p,a}) a_1(t) e^{j \frac{m\vec{v}_0 \cdot \vec{r}}{\hbar}} = j\hbar \frac{da_1(t)}{dt} e^{j \frac{m\vec{v}_0 \cdot \vec{r}}{\hbar}}$$

$$\frac{1}{2} \frac{m\vec{v}_0^2}{m} a_1(t) + (E_a + E_{p,a}) a_1(t) = j\hbar \frac{da_1(t)}{dt}$$

$= E_{c,a}$

$$\cdot \underbrace{(E_{c,a} + E_a + E_{p,a})}_{= E_1} a_1(t) = j\hbar \frac{da_1(t)}{dt}$$

Donc: $\frac{da_1(t)}{dt} + j \frac{E_1}{\hbar} a_1(t) = 0$

De même: $\frac{da_2(t)}{dt} + j \frac{E_2}{\hbar} a_2(t) = 0$

6-b) Solution: $a_1(t) = a_1(0) \exp(-j \frac{E_1 t}{\hbar})$ $a_2(t) = a_2(0) \exp(-j \frac{E_2 t}{\hbar})$

Que l'on écrit:

$$\begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(-j \frac{E_1 t}{\hbar}) & 0 \\ 0 & \exp(-j \frac{E_2 t}{\hbar}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \end{pmatrix}$$

c) Un état stationnaire est un état pour lequel la particule a une énergie constante au cours du temps. Donc la particule garde l'énergie E_1 .

7.

$$R(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -j \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\phi_{\text{par}}} \\ -j \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\phi_{\text{par}}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad R(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & -j e^{j\phi_{\text{par}}} \\ -j e^{-j\phi_{\text{par}}} & 0 \end{pmatrix}$$

8-a) On a:

$$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc } A^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule:

$$\vec{a}(z) = \begin{pmatrix} e^{-j \frac{E_1 z}{\hbar}} & 0 \\ 0 & e^{-j \frac{E_2 z}{\hbar}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -j \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\phi_{\text{par}}} \\ -j \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\phi_{\text{par}}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j \frac{E_1 z}{\hbar}} & -j \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j(\frac{E_2 z}{\hbar} - \phi_{\text{par}})} \\ -j \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j(\frac{E_1 z}{\hbar} + \phi_{\text{par}})} & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j \frac{E_2 z}{\hbar}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc: $\vec{a}(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j \frac{E_1 z}{\hbar}} \\ -j \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j(\frac{E_2 z}{\hbar} + \phi_{\text{par}})} \end{pmatrix}$

d'où: $\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j \frac{E_1 t}{\hbar}} e^{j \frac{m \vec{v}_0 \cdot \vec{r}}{\hbar}} - \frac{j}{\sqrt{2}} e^{-j(\frac{E_2 t}{\hbar} + \phi_{\text{par}})} e^{j \frac{m (\vec{v}_0 + 2\vec{v}_n) \cdot \vec{r}}{\hbar}}$

$A > z$: $\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j \frac{E_1 t}{\hbar}} e^{j \frac{m \vec{v}_0 \cdot \vec{r}}{\hbar}} - \frac{j}{\sqrt{2}} e^{-j(\frac{E_2 t}{\hbar} + \phi_{\text{par}})} e^{j \frac{m (\vec{v}_0 + 2\vec{v}_n) \cdot \vec{r}}{\hbar}}$

$A < 0$: $\Psi(\vec{r}, 0) = e^{j \frac{m \vec{v}_0 \cdot \vec{r}}{\hbar}}$ fonction d'onde de l'état 1 seule

$A > z$ on retrouve la fonction d'onde de l'état 1 avec une amplitude $\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ coefficient de transmission $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$A > z$, la fonction d'onde de l'état 2 est présente avec une amplitude $-\frac{j}{\sqrt{2}} e^{-j\phi_{\text{par}}}$

\Rightarrow on interprète son apparition comme une réflexion de coefficient $-\frac{j}{\sqrt{2}} e^{-j\phi_{\text{par}}}$

b) Pour $\vec{a}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a: $\vec{a}(z) = \begin{pmatrix} -j \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j(\frac{E_1 z}{\hbar} - \phi_{\text{par}})} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j \frac{E_2 z}{\hbar}} \end{pmatrix}$

coefficient de transmission: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ coefficient de réflexion: $-\frac{j}{\sqrt{2}} e^{j\phi_{\text{par}}}$

c) Pour une impulsion Π , les $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sont remplacés par des 0 dans la matrice $R(\Omega Z)$

Il n'y aura donc pas de transmission. L'élément optique analogue est un miroir

9. Onde 1: trajet ABD avec une transmission et deux réflexions

$$E_1(M,t) = E_0 \cdot t_0 \cdot r_0^2 e^{j(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} (SM)_1)} \quad (M = \text{détecteur})$$

Onde 2: trajet ACD avec une transmission et deux réflexions

$$E_2(M,t) = E_0 t_0 r_0^2 e^{j(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} (SM)_2)}$$

$$\text{Intensité: } I(M) = K (E_1(M,t) + E_2(M,t)) (E_1(M,t)^* + E_2(M,t)^*)$$

$$= 2K E_0^2 t_0^2 r_0^4 (1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda_0} ((SM)_2 - (SM)_1)))$$

On pose: $I_0 = K E_0^2$ On a: $(SM)_2 - (SM)_1 = (m-1)l$ car les trajets sont les mêmes hormis sur la longueur l

$$\text{Donc: } I(M) = 2I_0 t_0^2 r_0^4 (1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda_0} (m-1)l))$$

10. Pour la voie 1 (trajet ABCD):

- en A: réflexion de l'état a à l'état b → coefficient de réflexion $-\frac{j}{\sqrt{2}} e^{-j\Phi_{\text{laser}}(0)}$
- en B: transmission → coefficient de transmission $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- en C: réflexion de l'état b à l'état a → coefficient de réflexion $-\frac{j}{\sqrt{2}} e^{j\Phi_{\text{laser}}(2T)}$
- en D: transmission → coefficient de transmission $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\text{Fonction d'onde: } \Psi_1 = \Psi_0 e^{j \frac{m\vec{v}_0 \vec{n} - E_1 t}{\hbar}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{j}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{j}{\sqrt{2}}\right) e^{j(-\Phi_{\text{laser}}(0) + \Phi_{\text{laser}}(2T) - \Phi_{\text{I}})}$$

$$= -\frac{1}{4}$$

Pour la voie 2 (trajet AB'C'D):

- en A: transmission → coefficient de transmission $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- en B': réflexion de l'état a à l'état b → coefficient de réflexion $-\frac{j}{\sqrt{2}} e^{-j\Phi_{\text{laser}}(T)}$
- en C': transmission → coefficient de transmission $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- en D: réflexion de l'état b à l'état a → coefficient de réflexion $-\frac{j}{\sqrt{2}} e^{j\Phi_{\text{laser}}(3T)}$

$$\text{Fonction d'onde: } \Psi_2 = \Psi_0 e^{j \frac{m\vec{v}_0 \vec{n} - E_1 t}{\hbar}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{j}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{j}{\sqrt{2}}\right) e^{j(-\Phi_{\text{laser}}(T) + \Phi_{\text{laser}}(3T) - \Phi_{\text{II}})}$$

→ Amplitude de probabilité = fonction d'onde totale = $\Psi_1 + \Psi_2$

$$\Rightarrow \Psi = -\frac{1}{4} \Psi_0 e^{j \frac{m\vec{v}_0 \vec{n} - E_1 t}{\hbar}} \left(e^{j(-\Phi_{\text{laser}}(0) + \Phi_{\text{laser}}(2T) - \Phi_{\text{I}})} + e^{j(-\Phi_{\text{laser}}(T) + \Phi_{\text{laser}}(3T) - \Phi_{\text{II}})} \right)$$

$$\text{Puis: } P = |\Psi|^2 = \frac{1}{16} |\Psi_0|^2 \left[2 + 2 \cos(\underbrace{\Phi_{\text{II}} - \Phi_{\text{I}}}_{\Delta\Phi} - \underbrace{\Phi_{\text{laser}}(0) + \Phi_{\text{laser}}(2T) + \Phi_{\text{laser}}(T) - \Phi_{\text{laser}}(3T)}_{\Delta\Phi_{\text{laser}}}) \right]$$

$$\text{Donc: } P = \frac{1}{8} |\Psi_0|^2 [1 + \cos(\Delta\Phi + \Delta\Phi_{\text{laser}})]$$

11. Pour la frange centrale: $\Delta\Phi + \Delta\Phi_{\text{laser}} = 0 \Rightarrow \Delta\Phi = -2\pi \delta_{\text{laser}}^* T$

Pour la frange d'ordre 1: $\Delta\Phi + \Delta\Phi_{\text{laser}} = 2\pi \Rightarrow -2\pi \delta_{\text{laser}}^* T + 2\pi \delta_{\text{laser}} T = 2\pi$

$$\text{Donc: } T = \frac{1}{\delta_{\text{laser}} - \delta_{\text{laser}}^*} = \frac{1}{-360 + 410} \quad \text{A.N: } T = 20 \text{ ms}$$

12 a) Sur chacune des deux voies, l'atome passe autant de temps dans l'état a (durée T) que dans l'état b (durée 2T). La phase cumulée due aux énergies potentielle et électrostatique est la même.

$$\begin{aligned}
 b) \Delta\phi &= \phi_{II} - \phi_I = \frac{1}{\hbar} \int_{AB'CD} (mv^2 - \frac{1}{2}mv^2 - E_p - E_{elec}) dt - \frac{1}{\hbar} \int_{ABCD} (mv^2 - \frac{1}{2}mv^2 - E_p - E_{elec}) dt \\
 &= \frac{1}{\hbar} \left(\int_{AB'CD} \frac{1}{2}mv^2 dt - \int_{ABCD} \frac{1}{2}mv^2 dt \right) \\
 &= \frac{m}{2\hbar} \int_0^{3T} (v_{II}^2 - v_I^2) dt
 \end{aligned}$$

$$\text{donc: } \Delta\phi = \frac{m}{\hbar} \int_0^{3T} (\vec{v}_{II} - \vec{v}_I) \frac{\vec{v}_{II} + \vec{v}_I}{2} dt$$

$$\begin{aligned}
 \forall [0, T]: \vec{v}_{II} - \vec{v}_I &= -2\vec{v}_n & \frac{\vec{v}_{II} + \vec{v}_I}{2} &= \vec{v}_0 + \vec{v}_n \\
 [T, 2T]: \vec{v}_{II} - \vec{v}_I &= 0 & \frac{\vec{v}_{II} + \vec{v}_I}{2} &= \vec{v}_0 + 2\vec{v}_n \text{ jusqu'à } t'; \vec{v}_0 + 2\vec{v}_n + \Delta\vec{v}' \text{ ensuite} \\
 [2T, 3T]: \vec{v}_{II} - \vec{v}_I &= 2\vec{v}_n & \frac{\vec{v}_{II} + \vec{v}_I}{2} &= \vec{v}_0 + \vec{v}_n + \Delta\vec{v}'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc: } \Delta\phi &= \frac{m}{\hbar} \left[-2\vec{v}_n \cdot (\vec{v}_0 + \vec{v}_n) T + 2\vec{v}_n \cdot (\vec{v}_0 + \vec{v}_n + \Delta\vec{v}') T \right] \\
 &= 2 \frac{m}{\hbar} \vec{v}_n \cdot \Delta\vec{v}' T
 \end{aligned}$$

$$\text{Or: } \vec{v}_n = \frac{\hbar \vec{k}}{m} \text{ (question 4)} \quad \text{Donc: } \Delta\phi = 2 T \hbar \cdot \vec{k} \cdot \Delta\vec{v}'$$

$$\begin{aligned}
 13. a) \text{ Pour la frange centrale: } \Delta\phi &= -\Delta\phi_{\text{easer}} \Rightarrow 2 T \hbar \cdot \Delta v = -2\pi \delta_{\text{easer}}^* T \\
 &\Rightarrow \hbar \cdot 2N v_n = -\pi \delta_{\text{easer}}^*
 \end{aligned}$$

$$\text{et } v_n = \frac{\hbar k}{m} \text{ donc: } \delta_{\text{easer}}^* = -\frac{2N \hbar k^2}{m\pi}$$

$$b) N = -\frac{m\pi \delta_{\text{easer}}^*}{2\hbar k^2} = \frac{1,5 \cdot 10^{-25} \cdot \pi \cdot (-15907410)}{2 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34} \cdot (10^7)^2} \Rightarrow \underline{N = 357}$$

$$c) \text{ Or a: } m = -\frac{2N \hbar k^2}{\pi \delta_{\text{easer}}^*} \quad \text{La mesure de } \delta_{\text{easer}}^* \text{ permet de déterminer } m$$

$$\text{Or a: } \frac{v(m)}{m} = \sqrt{4 \left(\frac{v(k)}{\hbar} \right)^2 + \left(\frac{v(\delta_{\text{easer}}^*)}{\delta_{\text{easer}}^*} \right)^2}$$

$$\text{Or: } \hbar = \frac{h}{2\pi} = \frac{2\pi \hbar}{c} \Rightarrow v(k) = \frac{2\pi}{c} v(f) \Rightarrow \frac{v(k)}{\hbar} = 2 \cdot 10^{-12}$$

$$\text{et: } \frac{v(\delta_{\text{easer}}^*)}{\delta_{\text{easer}}^*} = 3 \cdot 10^{-9} \gg \frac{v(k)}{\hbar} \quad \text{Donc: } \frac{v(m)}{m} \approx \frac{v(\delta_{\text{easer}}^*)}{\delta_{\text{easer}}^*}$$

$$d) \text{ L'incertitude sur une mesure est: } \frac{v(m)}{m} = 3 \cdot 10^{-9}$$

En faisant M mesures, l'incertitude sur la moyenne sera de $\frac{3 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{M}}$

$$\text{On veut: } \frac{3 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{M}} = 1,5 \cdot 10^{-10} \Rightarrow M = 400 \Rightarrow \underline{\text{durée de 400 minutes}}$$

14. a) L'énergie potentielle de pesanteur varie de la même façon pour les deux voies si le champ de pesanteur est uniforme. La relation (13) est encore valable.

b) D'après le théorème de la quantité de mouvement: $m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{g}t + \vec{c}_k$
 La pesanteur conduit à rajouter un terme $\vec{g}t$ aux vitesses de la question 12.

$$[0, T]: \vec{v}_I = \vec{v}_0 + 2\vec{v}_n + \vec{g}t \quad \vec{v}_{II} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{II} - \vec{v}_I = -2\vec{v}_n \quad \frac{\vec{v}_{II} + \vec{v}_I}{2} = \vec{v}_0 + \vec{v}_n + \vec{g}t$$

$$[T, 2T]: \vec{v}_I = \vec{v}_0 + 2\vec{v}_n + \vec{g}t \text{ avant } t' \quad \vec{v}_{II} = \vec{v}_0 + 2\vec{v}_n + \vec{g}t \text{ avant } t'$$

$$\vec{v}_0 + 2\vec{v}_n + \Delta\vec{v} + \vec{g}t \text{ après } t' \quad = \vec{v}_0 + 2\vec{v}_n + \Delta\vec{v} + \vec{g}t \text{ après } t'$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{II} - \vec{v}_I = \vec{0}$$

$$[2T, 3T]: \vec{v}_I = \vec{v}_0 + \Delta\vec{v} + \vec{g}t \quad \vec{v}_{II} = \vec{v}_0 + 2\vec{v}_n + \Delta\vec{v} + \vec{g}t$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{II} - \vec{v}_I = 2\vec{v}_n \quad \frac{\vec{v}_{II} + \vec{v}_I}{2} = \vec{v}_0 + \Delta\vec{v} + \vec{v}_n + \vec{g}t$$

$$\text{Donc: } \Delta\phi^1 = \frac{m}{h} \left(-2\vec{v}_n \cdot (\vec{v}_0 + \vec{v}_n)T - 2\vec{v}_n \int_0^T \vec{g}t dt + 2\vec{v}_n \cdot (\vec{v}_0 + \Delta\vec{v} + \vec{v}_n)T + 2\vec{v}_n \int_{2T}^{3T} \vec{g}t dt \right)$$

$$= \frac{m}{h} \left(2\vec{v}_n \cdot \Delta\vec{v} T - 2\vec{v}_n \cdot \vec{g} \frac{T^2}{2} + 2\vec{v}_n \cdot \vec{g} \left(\frac{9T^2 - 4T^2}{2} \right) \right)$$

$$= \underbrace{\frac{2m}{h} \vec{v}_n \cdot \Delta\vec{v} T}_{\Delta\phi} + \frac{2m}{h} \vec{v}_n \cdot \vec{g} \cdot 2T^2$$

$$\text{D'où: } \Delta\phi_g = \frac{4m}{h} \vec{v}_n \cdot \vec{g} T^2$$

$$\frac{\Delta\phi_g}{\Delta\phi} = \frac{\frac{4m v_n g T^2}{h}}{2Th \Delta v} = \frac{2m v_n g T}{h h 500 v_n} = \frac{m g T}{300 h h}$$

A.N. $\frac{\Delta\phi_g}{\Delta\phi} = 0,1$ L'effet de la pesanteur n'est pas négligeable

c) En passant de $+\Delta\vec{v}$ à $-\Delta\vec{v}$, $\Delta\phi$ passe à $-\Delta\phi$

$$\frac{\Delta\phi_g}{\Delta\phi} = 0,1 \text{ pour une mesure, } \frac{\Delta\phi_g}{\Delta\phi} = -0,1 \text{ pour l'autre mesure}$$

Cela peut compenser l'effet de la gravité.

II Effet systématique sur la mesure de la masse m d'un atome de Rubidium 87 lié à la combustion du front d'onde des lasers

15. $\vec{p} = \hbar \vec{k} \Rightarrow p_z = \hbar k \cos \theta \approx \hbar k (1 - \frac{\theta^2}{2})$ si $\theta \ll 1$ rad
 Donc: $\Delta k_{\text{rel}} = -\frac{\theta^2}{2}$ $|\Delta k_{\text{rel}}| < 10^{-12} \Rightarrow |\theta| < 1,4 \cdot 10^{-6}$ rad

16 a) Pour une OEMPPH se propageant selon $+z$: $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ avec $\vec{k} = k \vec{u}_z$
 $= \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}$

La phase $\Phi(z) = -kz$ est constante si $z = \text{cte} \Rightarrow$ plan perpendiculaire à Oz donc à \vec{k}

b) surface d'onde: $\Phi(\vec{r}) = \text{cte} \Rightarrow d\Phi = 0$ pour tout déplacement $d\vec{r}$ sur la surface d'onde

On: $d\Phi = \text{grad} \Phi \cdot d\vec{r}$

D'où: $\text{grad} \Phi \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \text{grad} \Phi$ perpendiculaire à la surface d'onde

c) $\vec{p}_z = \hbar \frac{\partial \Phi}{\partial z}$

17 a) On a: $k_z^2 = k^2 - k_x^2 - k_y^2 = k^2 (1 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2})$

On: $\frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \sim \frac{\frac{1}{\omega_0^2}}{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{\lambda^2}{\omega_0^2} \ll 1$

Par développement limité: $k_z \approx k (1 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k^2}) \Rightarrow k_z \approx k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}$

b) $\vec{E} = E_0 \vec{u}' \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(k_x x + k_y y + k_z z)} e^{-\frac{k_x^2 + k_y^2}{4} \frac{\omega_0^2}{k^2}} dx dy$
 $= E_0 \vec{u}' \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(k_x x + k_y y)} e^{j(k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}) z} e^{-\frac{k_x^2 + k_y^2}{4} \frac{\omega_0^2}{k^2}} dx dy$
 $= E_0 \vec{u}' \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{[-\frac{1}{2}(k_x^2 + k_y^2)(\frac{\omega_0^2}{2} + j\frac{\delta}{k}) + j(k_x x + k_y y)]} dx dy e^{jkz}$
 where $\alpha = \frac{\omega_0^2}{2}$ and $\beta = \frac{\delta}{k}$

D'après la relation (17):

$$\vec{E} = E_0 \vec{u}' e^{jkz} \cdot \frac{2\pi}{\frac{\omega_0^2}{2} + j\frac{\delta}{k}} e^{-\frac{x^2 + y^2}{\omega_0^2 + j\frac{2\delta}{k}}}$$

18 a) On a: $\vec{E} \propto e^{jkz} \frac{1}{\frac{\omega_0^2}{2} + j\frac{\delta}{k}} \exp(j \text{Arg}(\frac{\omega_0^2}{2} + j\frac{\delta}{k})) e^{-\frac{x^2 + y^2}{\omega_0^2 + \frac{4\delta^2}{k^2}} (\omega_0^2 - j\frac{2\delta}{k})}$

La phase $\Phi(x, y, z)$ est l'argument de \vec{E} , soit:

$$\Phi(x, y, z) = kz - \text{Arctan}\left(\frac{2\delta}{\omega_0^2 k}\right) + \frac{2\delta}{k} \frac{x^2 + y^2}{\omega_0^2 + \frac{4\delta^2}{k^2}}$$

$$= kz - \text{Arctan}\left(\frac{\delta}{\frac{\omega_0^2 k}{2}}\right) + \frac{\delta \cdot (x^2 + y^2)}{\frac{\omega_0^2 k}{2} \left(1 + \frac{3\delta^2}{\omega_0^2 k^2}\right)}$$

On obtient bien la relation (19), avec: $z_R = \frac{w_0^2 k}{2}$ $r^2 = x^2 + y^2$ $w(z) = \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} w_0$

b) On a: $p_z = k \frac{\partial \Phi}{\partial z}$

Soit:
$$p_z = k \left[k + \frac{r^2}{\left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right) z_R w_0^2} - \frac{r^2 z \cdot \frac{2z}{z_R^2}}{\left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right)^2 z_R w_0^2} - \frac{1}{z_R} \frac{1}{1 + \frac{z^2}{z_R^2}} \right]$$

On a $p_z(z=0) = k \left[k + \frac{r^2}{z_R w_0^2} - \frac{1}{z_R} \right] = k \left[k + \frac{2r^2}{k w_0^4} - \frac{2}{w_0^2 k} \right]$

Donc: $\delta k_{\text{rel}}(z=0) = \frac{k \left[k + \frac{2r^2}{k w_0^4} - \frac{2}{w_0^2 k} \right] - k k}{k k} \Rightarrow \delta k_{\text{rel}}(z=0) = \frac{2}{k^2} \left(\frac{r^2}{w_0^4} - \frac{1}{w_0^2} \right)$

c) On a: $\frac{r^2}{w_0^4} \approx 400$ $\frac{1}{w_0^2} \approx 4 \cdot 10^4$ → le deuxième terme est dominant: $\delta k_{\text{rel}}(z=0) < 0$

A.N: $\delta k_{\text{rel}}(z=0) = -1,3 \cdot 10^{-9}$ ($k = \frac{2\pi}{\lambda} \approx 8 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$)

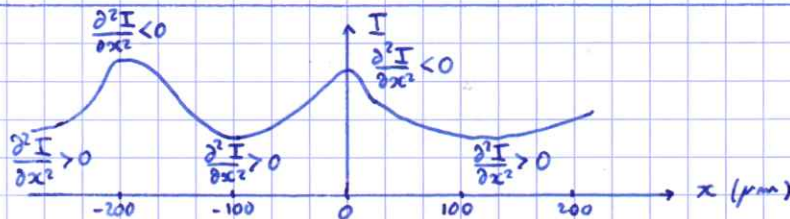
Cette erreur relative est importante par rapport à $\frac{v(m)}{m} \approx 1,5 \cdot 10^{-10}$

19 - Région de maxima d'intensité: Φ' décroît quand z augmente
Région de minima d'intensité: Φ' croît quand z augmente

On: $p_z = k \frac{\partial \Phi}{\partial z} = k \left[k + \frac{\partial \Phi'}{\partial z} \right] \Rightarrow \delta k_{\text{rel}} = \frac{1}{k} \frac{\partial \Phi'}{\partial z}$

Donc: $\delta k_{\text{rel}} < 0$ dans les régions de maxima d'intensité
 $\delta k_{\text{rel}} > 0$ dans les régions de minima d'intensité

20 a) Assez grossièrement on a:



b) δk_{rel} a même signe que $\Delta_x I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$

⇒ $\delta k_{\text{rel}} < 0$ quand l'intensité est maximum; $\delta k_{\text{rel}} > 0$ quand l'intensité est minimum
On retrouve les résultats de la question 19.

C'est aussi en accord avec la correction de Gouy où $\delta k_{\text{rel}} < 0$ dans une zone où I est maximum

21. Puisque la probabilité d'absorption est plus grande quand l'intensité est élevée, on s'attend à:

$\langle \delta k_{\text{rel}} \rangle < 0$

22. Valeur attendue pour une onde plane de vecteur d'onde $\vec{k}' = k \vec{e}_z$: $k k$

On a: $\langle p_z \rangle = k k (1 + \underbrace{\langle \delta k_{\text{rel}} \rangle}_{< 0}) < k k$

Ce n'est pas surprenant car la probabilité d'absorption est plus forte dans les minima d'intensité