DEVOIR MAISON 8 (Intégration)

Corrigé

Problème 1 : Étude de quelques intégrales classiques

A. Fonction Gamma d'Euler

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)\ln t}e^{-t}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est donc généralisée en 0 et en $+\infty$.
Étude en 0 *:* On a $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$.
Pour tout $t \in]0,1]$, on a $\dfrac{1}{t^{1-x}} \geqslant 0$.
Ainsi, par comparaison par équivalent, les intégrales $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
On sait que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $1-x<1$ c'est-à-dire $x>0$.
Étude en $+\infty$ *:* On a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0$ par croissances comparées donc $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
Pour tout $t \in [1,+\infty[$, $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$.
L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge car $2>1$.
Ainsi, par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.
On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x>0$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } \Gamma \text{ a pour domaine de définition }]0,+\infty[.}$$

2. Soit $x \in]0,+\infty[$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0<a<b<+\infty$.
Les fonctions $t \mapsto -e^{-t}$ et $t \mapsto t^x$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, de dérivées respectives $t \mapsto e^{-t}$ et $t \mapsto xt^{x-1}$, donc on a par intégration par parties :

$$\int_a^b t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}t^x\right]_a^b + x\int_a^b t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

On a $\displaystyle\lim_{a\to0^+}(-e^{-a}a^x) = 0$ (car $x>0$) et $\displaystyle\lim_{b\to0^+}(-e^{-b}b^x) = 0$ par croissances comparées.
Comme les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t$ convergent, on obtient par passage à la limite dans l'égalité obtenue ($a\to0^+$ et $b\to+\infty$) :

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\Gamma(n) = (n-1)!$
Initialisation : On a $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^0 e^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to+\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^b = 1$.
On a donc bien $\Gamma(1) = 0!$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\Gamma(n) = (n-1)!$
Comme $n \in]0, +\infty[$, on a d'après ce qui précède, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$
Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!}$$

3. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$.
La fonction $\varphi : t \mapsto t^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ donc le changement de variable $u = t^2$ est licite. On a $\mathrm{d}u = 2t\mathrm{d}t$ et $t = \sqrt{u}$.
Lorsque $t = 0$, on a $u = 0$ et lorsque $t \to +\infty$, on a $u \to +\infty$.
On en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t} 2t\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et de même valeur en cas de convergence.
Or, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{1/2-1}\,\mathrm{d}u$ converge (car $\frac{1}{2} > 0$) et vaut $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right).}$$

De même, on effectue le changement de variable $u = t^4$ (licite car la fonction $t \mapsto t^4$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$) dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^4}\,\mathrm{d}t$.
On obtient :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-t^4}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^4}}{4t^3} 4t^3\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } \int_0^{+\infty} e^{-t^4}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{4u^{3/4}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}$$

B. Intégrales de Gauss

1. La fonction exponentielle est convexe (car elle est deux fois dérivable, de dérivée seconde positive) donc sa courbe représentative se situe au-dessus de sa tangente en 0 qui a pour équation $y = x + 1$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout réel } u, \text{ on a } \mathrm{e}^u \geqslant 1 + u.}$$

2. Soit $u \in \mathbb{R}$.
D'après la question B.1. appliquée en $-u$, on a pour $u \leqslant 1$:

$$0 \leqslant 1 - u \leqslant \mathrm{e}^{-u} \quad \text{donc} \quad (1-u)^n \leqslant \mathrm{e}^{-nu}$$

par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$.
D'après la question B.1. appliquée en u, on a pour $u > -1$:

$$0 < 1 + u \leqslant \mathrm{e}^u \quad \text{donc} \quad \mathrm{e}^{-nu} \leqslant \frac{1}{(1+u)^n}$$

par décroissance de la fonction $x \mapsto x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1-u)^n \leqslant \mathrm{e}^{-nu} & \text{si } u \leqslant 1 \\ \mathrm{e}^{-nu} \leqslant \dfrac{1}{(1+u)^n} & \text{si } u > -1. \end{array}}$$

3. Soit n un entier naturel non nul.
La fonction $x \mapsto (1-x^2)^n$ est continue sur $[0,1]$ donc $\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \text{ converge}}$ (c'est une intégrale ordinaire).

La fonction $x \mapsto e^{-nx^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$.
On a pour tout $x \in [0,+\infty[$, $0 \leqslant e^{-nx^2} \leqslant e^{-x^2}$.
Or, d'après la question A.3., l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.
On en déduit par comparaison par inégalité que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\mathrm{d}x \text{ converge.}}$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ est continue sur $[0,+\infty[$.
On a $\dfrac{1}{(1+x^2)^n} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{2n}}$.
Comme pour tout $x \in [1,+\infty[$, $\dfrac{1}{x^{2n}} \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2n}}\mathrm{d}x$ converge (intégrale de Riemann en $+\infty$ avec $2n>1$), on en déduit par comparaison par équivalent que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x \text{ converge}}.$$

Pour tout $x \in [0,1]$, on a $u = x^2 \leqslant 1$ donc d'après la question B.2, $(1-x^2)^n \leqslant \mathrm{e}^{-nx^2}$.
Par croissance de l'intégrale ($0 \leqslant 1$), on en déduit que :

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{puis} \quad \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x$$

(par positivité de l'intégrale (convergente) car pour tout $x \in [1,+\infty[$, $\exp(-nx^2) \geqslant 0$).
Pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a $u = x^2 > -1$, donc d'après la question B.2, $\mathrm{e}^{-nx^2} \leqslant \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ donc par croissance de l'intégrale (les deux intégrales en jeu convergent) :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}.}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
En utilisant le changement de variable $x = \sin\theta$ (licite car $\theta \mapsto \sin\theta$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$, de dérivée $\theta \mapsto \cos\theta$, avec une intégrale ordinaire), on obtient :

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2\theta)^n \cos\theta\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}\theta\mathrm{d}\theta = W_{2n+1}.$$

En utilisant le changement de variable $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}u$ (licite car changement de variable affine, avec une intégrale convergente), on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} \frac{1}{\sqrt{n}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Enfin, avec le changement de variable $x = \tan\theta$ (licite car $\theta \mapsto \tan\theta$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $[0,\pi/2[$, de dérivée $\theta \mapsto \dfrac{1}{\cos^2\theta}$, avec une intégrale convergente), on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1+\tan^2\theta)^n} \frac{1}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} (\cos^2\theta)^n \frac{1}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = W_{2n-2}.$$

La relation de la question B.3 devient alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{W_{2n+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t \leqslant W_{2n-2}.}$$

5. En admettant que $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, on obtient $W_{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$ (suite extraite) donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} W_{2n+1} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ et de même, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} W_{2n-2} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Par passage à la limite dans les inégalités trouvées en B.4 après multiplication par $\sqrt{n}$, on obtient :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On en déduit la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

6. Soit $a \in]0, +\infty[$. La fonction $t \mapsto e^{-at^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
En utilisant le changement de variable $x = \sqrt{a}t$ (licite car changement de variable affine) dans l'intégrale convergente $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x$, on obtient que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2} \sqrt{a}\mathrm{d}t$ converge et a même valeur.
Comme $\sqrt{a} \neq 0$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\, \mathrm{d}t$ converge et on a par linéarité :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2} \sqrt{a}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

De plus, comme la fonction $t \mapsto e^{-at^2}$ est paire, par le changement de variable $u = -t$, on obtient que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-at^2}\, \mathrm{d}t$ est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\, \mathrm{d}t$, elle est donc convergente, et elle a la même valeur.
On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\, \mathrm{d}t$ converge et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-at^2}\, \mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\, \mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\, \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\, \mathrm{d}t \text{ converge et a pour valeur } \sqrt{\frac{\pi}{a}}.}$$

C. Intégrale de Dirichlet

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$.
⋆ On sait que $\cos(t) = 1 - \dfrac{t^2}{2} + \underset{t \to 0}{o}(t^2)$ donc $1 - \cos(t) = \dfrac{t^2}{2} + \underset{t \to 0}{o}(t^2)$ donc $1 - \cos(t) \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$.
On en déduit que $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} = \dfrac{1}{2}$.
La fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est donc prolongeable par continuité en 0 et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ est donc convergente car faussement impropre.
⋆ On a pour tout $t \in [1, +\infty[$, $0 \leqslant \left|\dfrac{1-\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1+|\cos(t)|}{t^2} \leqslant \dfrac{2}{t^2}$.
L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge (Riemann en $+\infty$ avec $2 > 1$) donc par linéarité, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2}\mathrm{d}t$ aussi.
Par comparaison par inégalité, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge absolument

donc converge.
On a donc prouvé que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

2. Les fonctions $f : t \mapsto 1-\cos(t)$ et $g : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, de dérivées respectives $f' : t \mapsto \sin(t)$ et $g' : t \mapsto -\frac{1}{t^2}$.
On a pour tout $t \in]0,+\infty[$, $f(t)g(t) = \frac{1-\cos(t)}{t}$.
On a $f(t)g(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2}{2t} = \frac{t}{2}$ donc $\lim\limits_{t\to 0} f(t)g(t) = 0 \in \mathbb{R}$.
On a pour tout $t \in]0,+\infty[$, $0 \leqslant |f(t)g(t)| \leqslant \frac{2}{t}$ donc par le théorème de limite par encadrement, $\lim\limits_{t\to +\infty} f(t)g(t) = 0 \in \mathbb{R}$.
Par intégration par parties, on en déduit que les intégrales $\int_0^{+\infty} f(t)g'(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)-1}{t^2}\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} f'(t)g(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ sont de même nature.
D'après la question précédente, l'intégrale $\int_0^{+\infty} -\frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge donc :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

3.(a) Soit $n \in \mathbb{N}$.
Les fonctions $t \mapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}$ et $t \mapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{t}$ sont continues sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ en tant que quotients de fonctions continues dont les dénominateurs ne s'annulent pas sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.
On a $\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{(2n+1)t}{t} = 2n+1$ donc $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} = 2n+1 \in \mathbb{R}$.
De même, $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} = 2n+1 \in \mathbb{R}$.
On en déduit que les fonctions $t \mapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}$ et $t \mapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{t}$ sont toutes deux prolongeables par continuité en 0.
Les intégrales $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}\mathrm{d}t$ et $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\mathrm{d}t$ sont donc convergentes.
Ainsi :

$$\boxed{\text{les réels } I_n \text{ et } J_n \text{ sont bien définis.}}$$

3.(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a par linéarité puis en utilisant une formule de trigonométrie :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+3)t) - \sin((2n+1)t)}{\sin t}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos((2n+2)t)\sin t}{\sin t}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} 2\cos(2(n+1)t)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{n+1}\sin(2(n+1)t)\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\sin((n+1)\pi) - \sin(0)\right) = 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} - I_n = 0.}$$

On en déduit que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
Comme $I_0 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\sin t}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} 1\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{\pi}{2}.}$$

3.(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions φ et $t \mapsto -\dfrac{1}{2n+1}\cos((2n+1)t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$, de dérivées respectives φ' et $t \mapsto \sin((2n+1)t)$.
On a alors par intégration par parties (intégrales ordinaires) :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \varphi(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t &= \left[-\varphi(t)\frac{1}{2n+1}\cos((2n+1)t)\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2}\varphi'(t)\cos((2n+1)t)\mathrm{d}t \\ &= 0 + \frac{\varphi(0)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2}\varphi'(t)\cos((2n+1)t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1} = 0$ et la suite $\left(\int_0^{\pi/2}\varphi'(t)\cos((2n+1)t)\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale :

$$\left|\int_0^{\pi/2}\varphi'(t)\cos((2n+1)t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{\pi/2}|\varphi'(t)|\underbrace{|\cos((2n+1)t)|}_{\leqslant 1}\mathrm{d}t \leqslant \underbrace{\int_0^{\pi/2}|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t}_{\text{ne dépend pas de } n}.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\varphi(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t = 0.}$$

3.(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a par linéarité :

$$J_n - I_n = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}\right)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\varphi(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t,$$

où φ est la fonction définie par : $\varphi(0) = 0$ et pour tout $t \in]0, \pi/2]$, $\varphi(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t}$.
Montrons que la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$.
Il est clair par les théorèmes généraux que la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \pi/2]$ et on a pour tout $t \in]0, \pi/2]$:

$$\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{\cos t}{(\sin t)^2} = \frac{t^2\cos t - \sin^2 t}{t^2\sin^2 t}.$$

On a de plus pour tout $t \in]0, \pi/2]$:

$$\varphi(t) = \frac{\sin t - t}{t\sin t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{-\frac{1}{3!}t^3}{t\times t} = -\frac{t}{6} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 = \varphi(0).$$

On en déduit que φ est continue en 0.
On a de plus au voisinage de 0 (développement limité à l'ordre 4 au numérateur) :

$$\varphi'(t) = \frac{t^2(1 - \frac{t^2}{2!} + o(t^2)) - (t - \frac{t^3}{3!} + o(t^4))^2}{t^2\sin^2 t} = \frac{t^2 - \frac{t^4}{2} + o(t^4) - (t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^4))}{t^2\sin^2 t} = \frac{-\frac{1}{6}t^4 + o(t^4)}{t^2\sin^2 t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{-\frac{1}{6}t^4}{t^2\times t^2} = -\frac{1}{6}.$$

Ainsi, φ est continue sur $[0, \pi/2]$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \pi/2]$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\varphi'(t) = -\frac{1}{6} \in \mathbb{R}$ donc par le théorème de limite de la dérivée, on en déduit que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$.
Par la question précédente, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(J_n - I_n) = 0.}$$

3.(e) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$J_n = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin((2n+1)t}{(2n+1)t}(2n+1)\mathrm{d}t.$$

Par le changement de variable affine $u = (2n+1)t$ dans cette intégrale convergente, on obtient que :

$$J_n = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin u}{u} \mathrm{d}u.$$

Or, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(2n+1)\pi}{2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u = I$ d'après la question C.2 donc par composition :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t.}$$

3.(f) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = (J_n - I_n) + I_n = (J_n - I_n) + \dfrac{\pi}{2}$ d'après 3.(b) et donc avec 3.(d), on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \dfrac{\pi}{2}$.
Par 3.(e) et par unicité de la limite, on obtient :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a par le relation de Chasles (intégrales ordinaires) :

$$\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t = \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$ et pour tout $t \in [(k-1)\pi, k\pi]$, on a $0 < t \leqslant k\pi$ donc $\dfrac{|\sin t|}{t} \geqslant \dfrac{|\sin t|}{k\pi}$ donc par croissance de l'intégrale, puis somme, on obtient :

$$\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{k\pi}\mathrm{d}t = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t|\mathrm{d}t$$

par linéarité.
La fonction $t \mapsto |\sin t|$ est π-périodique car pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin(t+\pi)| = |-\sin t| = |\sin t|$.
On en déduit que son intégrale a la même valeur sur n'importe quel intervalle de longueur π donc pour tout $k \in [\![2, n]\!]$ (ce résultat se retrouve par le changement de variable $t = u + (k-1)\pi$) :

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t|\mathrm{d}t = \int_0^\pi |\sin u|\mathrm{d}u = \int_0^\pi \sin t\mathrm{d}t = [-\cos t]_0^\pi = 1 + 1 = 2.$$

On en déduit par ce qui précède que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}.$$

Or, la série harmonique étant divergente et à termes positifs, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$.
Par inégalité, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t = +\infty$.
On en déduit que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_\pi^{x} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t$ n'a pas de limite finie en $+\infty$ (car sinon, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n\pi = +\infty$, on obtiendrait une contradiction par composition des limites).
On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t$ diverge donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t$ diverge également.
Ainsi :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \text{ n'est pas absolument convergente.}}$$

Problème 2 : extrait Mines PC 2022

A. 1. On sait par le cours que la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n} = \sum_{n\geqslant 1} n^{-1}z^n$ a pour rayon de convergence 1.
Il y a convergence de la série numérique pour tout complexe z appartenant au disque ouvert de convergence, qui est donc ici D.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } z \in D, \text{ la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n} \text{ converge.}}$$

Soit $z \in]-1,1[$.
On sait que pour tout $x \in]-1,1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$.
En appliquant cette égalité avec $x = -z$, on obtient $\ln(1-z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-1)^n z^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } z \in]-1,1[,\ L(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z).}$$

A.2. La fonction Φ est la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n} t^n$ (selon la variable t, z étant fixé dans D).
Notons R son rayon de convergence.
Soit $t \in \mathbb{R}_+$. D'après la question précédente, si $|tz| < 1$ alors la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n} t^n$ converge.
Si $z = 0$ alors on en déduit que la série converge pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ donc $R = +\infty$.
Si $z \neq 0$ alors on en déduit que la série converge pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $t < \frac{1}{|z|}$ donc $R \geqslant \frac{1}{|z|} > 1$ (puisque $|z| < 1$).
On constate que dans tous les cas, $[-1,1] \subset]-R,R[$.
Or, on sait par le cours que Φ est dérivable sur $]-R,R[$ et on peut dériver terme à terme sur cet intervalle. C'est donc en particulier vrai sur $[-1,1]$ et on a pour tout $t \in [-1,1]$:

$$\Phi'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n t^{n-1} = z\sum_{n=1}^{+\infty} (zt)^{n-1} = z\sum_{n=0}^{+\infty} (zt)^n = \frac{z}{1-zt} \text{ puisque } |zt| \leqslant |z| < 1.$$

Ainsi :

$$\boxed{\Phi : t \mapsto L(tz) \text{ est dérivable sur } [-1,1] \text{ et on a pour tout } t \in [-1,1],\ \Phi'(t) = \frac{z}{1-zt}.}$$

A.3. On sait alors par le cours (PCSI) que la fonction $\exp(\Phi)$ est dérivable sur $[-1,1]$ et a pour dérivée $t \mapsto \Phi'(t)\exp(\Phi(t)) = \frac{z}{1-zt}\exp(L(zt))$.
Par produit, on en déduit que la fonction Ψ est bien dérivable sur $[0,1]$ et on a pour tout $t \in [0,1]$:

$$\Psi'(t) = -z\exp(L(zt)) + (1-tz)\frac{z}{1-zt}\exp(L(zt)) = 0.$$

Comme la dérivée de Ψ est nulle sur l'intervalle $[0,1]$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } \Psi \text{ est constante sur } [0,1].}$$

On a donc pour tout $t \in [0,1]$, $\Psi(t) = \Psi(0) = e^{L(0)} = e^0 = 1$ donc en particulier pour $t = 1$, on obtient $(1-z)e^{L(z)} = 1$ d'où :

$$\boxed{\exp(L(z)) = \frac{1}{1-z}.}$$

A.4. Soit $z \in D$. Comme $|z| < 1$, on sait par la question 1 que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{|z|^n}{n}$ converge et a pour somme $L(|z|) = -\ln(1-|z|)$.
Par inégalité triangulaire, on a alors :

$$\boxed{|L(z)| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n} = -\ln(1-|z|).}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z^n \in D$ donc en appliquant ce qui précède à z^n, on obtient $0 \leqslant |L(z^n)| \leqslant -\ln(1-|z|^n)$.
De plus, on a $-\ln(1-|z|^n) \sim |z|^n$ car $\lim_{n\to+\infty} |z|^n = 0$ (puisque $|z| < 1$).
Or, la série géométrique $\sum |z|^n$ converge (puisque $|z| < 1$) donc par comparaison par équivalent puis par inégalité, on en déduit que la série $\sum L(z^n)$ converge absolument donc converge.

$$\boxed{\text{Pour tout } z \in D, \text{ la série } \sum L(z^n) \text{ converge.}}$$

A.5. L'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$ donc $\boxed{P(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n)\right) \neq 0.}$

On a pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{N} L(z^n)\right) = \prod_{n=1}^{N} \exp\left(L(z^n)\right) = \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n}$$

d'après la question 3 car $z^n \in D$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Lorsque N tend vers $+\infty$, le membre de gauche tend vers $P(z)$ par définition et par continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{C}$.
On en déduit que :

$$\boxed{P(z) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n}.}$$

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. En appliquant l'égalité ci-dessus avec e^{-t} (ce qui est possible car $|e^{-t}| < 1$), on obtient pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{N} L(e^{-nt})\right) = \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-e^{-nt}}.$$

Chaque terme du produit ci-dessus étant strictement positif (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e^{-nt} < 1$), on en déduit que :

$$\ln\left(\exp\left(\sum_{n=1}^{N} L(e^{-nt})\right)\right) = \ln\left(\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-e^{-nt}}\right) = -\sum_{n=1}^{N} \ln(1-e^{-nt}).$$

On a $\lim_{N\to+\infty} \exp\left(\sum_{n=1}^{N} L(e^{-nt})\right) = P(e^{-t}) > 0$.
Par continuité de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que le membre de gauche de l'égalité a pour limite $\ln(P(e^{-t}))$ lorsque N tend vers $+\infty$.
Le membre de droite a alors une limite finie lorsque N tend vers $+\infty$ donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \ln(1-e^{-nt})$ converge et on obtient en faisant tendre N vers $+\infty$:

$$\boxed{\ln(P(e^{-t})) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-e^{-nt}).}$$

B.1. La fonction q est continue en tout point de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\lim_{x\to n^-} q(x) = n-(n-1)-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to n^+} q(x) = n-n-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Ainsi, sur chaque segment, q n'admet qu'un nombre fini de points de discontinuité en lesquels elle admet des limites à gauche et à droite finies donc $\boxed{q \text{ est continue par morceaux sur } \mathbb{R}}$.
De plus, la fonction partie entière vérifie $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad q(x+1) = (x+1) - \lfloor x+1 \rfloor - \frac{1}{2} = x + 1 - \lfloor x \rfloor - 1 - \frac{1}{2} = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2} = q(x),$$

donc $\boxed{q \text{ est 1-périodique}}$.
Il reste à montrer que la fonction $|q|$ est paire.
Soit $x \in [0, \frac{1}{2}]$.
On a $q(x) = x - \frac{1}{2} \leqslant 0$ donc $|q(x)| = \frac{1}{2} - x$ et $q(-x) = -x - (-1) - \frac{1}{2} = -x + \frac{1}{2} \geqslant 0$ donc $|q(-x)| = -x + \frac{1}{2}$.
On a donc pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $|q(-x)| = |q(x)|$.
Pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, 0]$, en appliquant l'égalité précédente en $-x$, on obtient aussi $|q(-x)| = |q(x)|$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $y = x - \lfloor x \rfloor$. On a $y \in [0, 1[$.
Si $y \in [0, \frac{1}{2}]$, on a par 1-périodicité et par ce qui précède :

$$|q(-x)| = |q(-x + \lfloor x \rfloor)| = |q(-y)| = |q(y)| = |q(x - \lfloor x \rfloor)| = |q(x)|.$$

Si $y \in]\frac{1}{2}, 1[$, alors $y - 1 \in [-\frac{1}{2}, 0]$ et on a :

$$|q(-x)| = |q(-x + \lfloor x \rfloor + 1)| = |q(-(y-1))| = |q(y-1)| = |q(x - \lfloor x \rfloor - 1)| = |q(x)|.$$

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|q(-x)| = |q(x)|$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\text{la fonction } |q| \text{ est paire.}}$$

B.2. Soit $t > 0$. La fonction $u \mapsto \dfrac{q(u)}{e^{tu} - 1}$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$ (car la fonction $u \mapsto e^{tu} - 1$ est continue sur $[1, +\infty[$ et ne s'y annule pas).
On a pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $|q(x)| = \frac{1}{2} - x \leqslant \frac{1}{2}$ et pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, 0]$, on a par parité, $|q(x)| = |q(-x)| \leqslant \frac{1}{2}$ puisque $-x \in [0, \frac{1}{2}]$.
Par 1-périodicité, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|q(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.
Par conséquent, pour tout $u \geqslant 1$, on a :

$$0 \leqslant \left| u^2 \frac{q(u)}{e^{tu} - 1} \right| \leqslant \frac{1}{2} \frac{u^2}{e^{tu} - 1}.$$

Or, $\dfrac{u^2}{e^{tu} - 1} \underset{u \to +\infty}{\sim} u^2 e^{-tu} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (théorème des croissances comparées).
On en déduit par le théorème de limite par encadrement que $\lim\limits_{u \to +\infty} u^2 \dfrac{q(u)}{e^{tu} - 1} = 0$ donc :

$$\frac{q(u)}{e^{tu} - 1} \underset{u \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right).$$

Or, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2}$ est d'exposant $2 > 1$ donc elle converge.
Par comparaison, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{e^{tu} - 1} \mathrm{d}u$ converge.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } t > 0, \text{ l'intégrale } \int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{e^{tu} - 1} \mathrm{d}u \text{ est bien définie.}}$$

B.3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On a par la relation de Chasles et après le changement de variable affine $t = u - k$:

$$\int_1^n \frac{q(u)}{u} \mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{q(u)}{u} \mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^1 \frac{q(t+k)}{t+k} \mathrm{d}t.$$

Comme q est 1-périodique, on a $q(t+k) = q(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$ donc :

$$\int_1^n \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^1 \frac{q(t)}{t+k}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^1 \frac{t-\frac{1}{2}}{t+k}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^1 \left(1 - \frac{k+\frac{1}{2}}{t+k}\right)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \left(k+\frac{1}{2}\right)\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+k}\right).$$

Or pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+k} = [\ln|t+k|]_0^1 = \ln(k+1) - \ln(k)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_1^n \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u &= (n-1) - \sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)(\ln(k+1) - \ln(k)) \\
&= (n-1) - \sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln(k+1) + \sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln(k) \\
&= (n-1) - \sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln(k+1) + \sum_{k=1}^{n-1}\left((k-1)+\frac{1}{2}\right)\ln(k) + \sum_{k=1}^{n-1}\ln(k) \\
&= (n-1) + \ln((n-1)!) - \sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln(k+1) - \left((k-1)+\frac{1}{2}\right)\ln(k)\right].
\end{aligned}$$

Cette dernière somme étant télescopique, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\int_1^n \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u &= (n-1) + \ln((n-1)!) - \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln(n) \\
&= (n-1) + \ln((n-1)! \times n) - \ln(n) - \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln(n) \\
&= (n-1) + \ln(n!) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n)
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.
La seconde égalité s'obtient en écrivant $n = \ln(e^n)$ et $\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) = \ln\left(n^{n+\frac{1}{2}}\right) = \ln\left(n^n\sqrt{n}\right)$.

$$\boxed{\int_1^n \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \ln(n!) + (n-1) - n\ln(n) - \frac{1}{2}\ln(n) = \ln\left(\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}\right) - 1.}$$

B.4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$0 \leqslant \left|\int_{\lfloor x\rfloor}^x \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_{\lfloor x\rfloor}^x \frac{|q(u)|}{u}\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{2}\int_{\lfloor x\rfloor}^x \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{\lfloor x\rfloor}\right).$$

Or on a $x - 1 < \lfloor x\rfloor \leqslant x$ donc $1 - \frac{1}{x} < \frac{\lfloor x\rfloor}{x} \leqslant 1$. Par le théorème des gendarmes, on obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x\rfloor}{x} = 1$.
Et par continuité du logarithme : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{\lfloor x\rfloor}{x}\right) = \ln(1) = 0$.
L'encadrement ci-dessus donne donc par le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \int_{\lfloor x\rfloor}^x \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = 0.}$$

Voyons comment en déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u$ converge.
Tout d'abord, notons que la question précédente permet de démontrer que la suite $\left(\displaystyle\int_1^n \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u\right)_{n\geqslant 2}$ converge puisque par la formule de Stirling, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi},$$

et donc par continuité du logarithme :

$$\int_1^n \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \ln\left(\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.$$

Alors, pour tout réel x au voisinage de $+\infty$, on se ramène au cas d'un paramètre entier avec la relation de Chasles :

$$\int_1^x \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \int_1^{\lfloor x\rfloor} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u + \int_{\lfloor x\rfloor}^x \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u.$$

Comme $\lfloor x\rfloor \in \mathbb{N}$ tend vers l'infini quand $x \to +\infty$, ce qui précède montre que, par composition de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_1^{\lfloor x\rfloor} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1$. La seconde intégrale a une limite nulle quand $x \to +\infty$ d'après la résolution en début de question. Alors, en tant que somme de quantités ayant une limite finie, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1 + 0.$$

Ceci démontre que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u \text{ converge et on a } \int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.}$$

B.5. La fonction $u \mapsto \ln(1-e^{-u})$ est continue sur $]0,+\infty[$ (on a bien pour tout $u>0$, $1-e^{-u}>0$). Comme $\lim\limits_{u\to+\infty} e^{-u} = 0$, on a $-\ln(1-e^{-u}) \underset{u\to+\infty}{\sim} e^{-u}$.

Or, pour tout $u \in [0,+\infty[$, $e^{-u} \geqslant 0$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}\mathrm{d}u$ converge (intégrale de référence avec $\alpha = 1 > 0$).

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} -\ln(1-e^{-u})\mathrm{d}u$ converge donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(1-e^{-u})\mathrm{d}u$ aussi.

On sait par ailleurs que $e^{-u} - 1 \underset{u\to0}{\sim} -u$ donc $1-e^{-u} \underset{u\to0}{\sim} u$. Montrons que $\ln(1-e^{-u}) \underset{u\to0}{\sim} \ln u$.

On a pour tout $u > 0$:

$$\frac{\ln(1-e^{-u})}{\ln u} = \frac{\ln((1-e^{-u})/u) + \ln u}{\ln u} = \frac{\ln((1-e^{-u})/u)}{\ln u} + 1 \underset{u\to0}{\longrightarrow} 1$$

puisque $\lim\limits_{u\to0} \ln((1-e^{-u})/u) = \ln 1 = 0$.

On a donc $-\ln(1-e^{-u}) \underset{u\to0}{\sim} -\ln u$, pour tout $u \in]0,1]$, $-\ln u \geqslant 0$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln u\,\mathrm{d}u$ converge (intégrale de référence).

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -\ln(1-e^{-u})\mathrm{d}u$ converge donc $\displaystyle\int_0^1 \ln(1-e^{-u})\mathrm{d}u$ aussi.

Ainsi :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \ln(1-e^{-u})\mathrm{d}u \text{ converge.}}$$

B.6. Suivant l'indication de l'énoncé, nous allons d'abord démontrer que la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1-e^{-x}}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = \frac{e^{-x}x - (1-e^{-x})}{x^2} = \frac{(1+x)e^{-x} - 1}{x^2}.$$

Or, par convexité de l'exponentielle, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $1 \geqslant (1+x)e^{-x}$, ce dont on déduit $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) \leqslant 0$.

Ainsi, la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la fonction $\ln\circ g$ l'est également (on a bien $g > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$). On en déduit :

$$\forall t \in]0,1], \ \forall u \in]0,1], \quad \ln(g(t)) \leqslant \ln(g(tu)) \leqslant \lim_0 \ln\circ g.$$

On a prouvé à la question précédente que $\lim\limits_{0} \ln \circ g = \ln(1) = 0$.
Intégrons l'inégalité ci-dessus sur $]0,1]$ (les intégrales en jeu convergent, $u \mapsto \ln(g(tu))$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0). On obtient :

$$\forall t \in]0,1], \quad \int_0^1 \ln(g(t))\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 \ln\left(g(tu)\right) \mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 0\mathrm{d}u,$$

c'est-à-dire :

$$\forall t \in]0,1], \quad \ln(g(t)) \leqslant \int_0^1 \ln\left(g(tu)\right) \mathrm{d}u \leqslant 0.$$

Comme on l'a vu ci-dessus, on a : $\lim\limits_{t\to 0} \ln(g(t)) = 0$. Par conséquent, par le théorème des gendarmes, cet encadrement démontre qu'on a : $\lim\limits_{t\to 0^+} \int_0^1 \ln\left(g(tu)\right) \mathrm{d}u = 0$. On a donc démontré :

$$\lim_{t\to 0^+} \int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{tu}\right) \mathrm{d}u = 0.$$

Or :

$$\forall t > 0, \quad \int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right) \mathrm{d}u = \int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{tu}\right) \mathrm{d}u + \int_0^1 \ln(u)\mathrm{d}u \quad \text{(intégrales convergentes)}$$

donc : $\lim\limits_{t\to 0^+} \int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right) \mathrm{d}u = \int_0^1 \ln(u)\mathrm{d}u = [u\ln(u) - u]_0^1 = -1$.
En conclusion :

$$\boxed{\lim_{t\to 0^+} \int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right) \mathrm{d}u = -1.}$$

B.7. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $\dfrac{t}{e^{tu}-1} > 0$ pour tout $u \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right]$, le signe de l'intégrande de $u_k(t)$ ne dépend que du signe de q. Or l'expression de la fonction q montre que :

$$\forall x \in [0,1[, \quad \begin{cases} q(x) \leqslant 0 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ q(x) \geqslant 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[. \end{cases}$$

Par 1-périodicité de q, on a donc :

$$\forall x \in \left]\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right[, \quad q(x) = \begin{cases} -|q(x)| \leqslant 0 & \text{si } k \text{ est pair,} \\ |q(x)| \geqslant 0 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

On exclut les bornes pour éviter les distinctions de cas fastidieuses, et inutiles (car l'intégrale ignore les valeurs en les points isolés, il ne coûte donc rien d'étudier son signe en excluant les extrémités de l'intervalle d'intégration). On en déduit d'une part :

$$\forall x \in \left]\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right[, \quad q(x) = (-1)^{k+1}|q(x)|,$$

et d'autre part que, par croissance de l'intégrale : $u_k(t) \leqslant 0$ si k est pair, et $u_k(t) \geqslant 0$ si k est impair (on a en effet établi plus haut que le signe de l'intégrande est dicté par le signe de q).
On a donc aussi, pour tenir compte de cette distinction de cas selon la parité de k :

$$\boxed{u_k(t) = (-1)^{k+1}|u_k(t)|.}$$

La première égalité demandée est alors immédiate :

$$\boxed{|u_k(t)| = (-1)^{k+1}u_k(t) = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t(-1)^{k+1}q(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u.}$$

Tout ce qui précède démontre que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k(t)$ est alternée : montrons qu'elle vérifie le critère spécial des séries alternées :

— Pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
|u_k(t)| - |u_{k+1}(t)| &= \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \int_{(k+1)/2}^{(k+2)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u \\
&= \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(k+1-v)|}{e^{t(k+1-v)}-1}\mathrm{d}v \qquad (v = k+1-u) \\
&= \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(v)|}{e^{t(k+1-v)}-1}\mathrm{d}v \qquad (|q| \text{ 1-pér. et paire}) \\
&= \int_{k/2}^{(k+1)/2} \underbrace{t|q(u)|}_{\geqslant 0} \underbrace{\left(\frac{1}{e^{tu}-1} - \frac{1}{e^{t(k+1-u)}-1}\right)}_{\geqslant 0}\mathrm{d}u \\
&\geqslant 0,
\end{aligned}$$

le signe du terme en facteur de $t|q(u)|$ découlant du fait que l'application $u \mapsto \frac{1}{e^{tu}-1}$ est décroissante (on a $u \leqslant k+1-u$ pour tout $u \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right]$).
Ceci montre que la suite $(|u_k(t)|)_{k\geqslant 1}$ est décroissante.

— Pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$0 \leqslant |u_k(t)| \leqslant \frac{1}{2}\int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t\mathrm{d}u}{e^{tu}-1} \leqslant \frac{1}{2}\int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{\ln(1)}{2} = 0,$$

donc par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{k\to+\infty} |u_k(t)| = 0$.

Ainsi la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k(t)$ est alternée, et la valeur absolue de son terme général décroît en convergeant vers 0. Par le théorème spécial des séries alternées, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k(t)$ converge et son reste est majoré en valeur absolue par son premier terme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t)\right| \leqslant |u_n(t)| \leqslant \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Or, par concavité de la fonction logarithme, on a pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n},$$

donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t)\right| \leqslant \frac{1}{2n}.}$$

B.8. De la question précédente, il résulte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right\|_\infty^{\mathbb{R}_+} \leqslant \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

ce qui démontre que la suite des restes de la série de fonctions $\sum\limits_{k\geqslant 2} u_k$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle, et donc la série de fonctions $\sum\limits_{k\geqslant 2} u_k$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

En tant que limite uniforme de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$, la somme $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} u_k$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. La continuité sur $\mathbb{R}_+$ implique en particulier que, quand $t \to 0^+$, on a :

$$\lim_{t\to 0^+} \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(0).$$

Or par la relation de Chasles, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u,$$

et, par le même argument :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} u_k(0) = \int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u.$$

Le calcul de limite ci-dessus se réécrit donc ainsi :

$$\boxed{\lim_{t\to 0^+} \int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1,}$$

d'après B.4.

B.9. Soit $t > 0$. En reprenant les arguments de la question B.2, on montre que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\lfloor u\rfloor}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u$ convergent. Écrivons :

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u &= \int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \int_1^{+\infty} \frac{t\lfloor u\rfloor}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{t}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{t\lfloor u\rfloor}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{t}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{tk}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{t}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Or une primitive de $u \mapsto \dfrac{t}{e^{tu}-1} = \dfrac{te^{-tu}}{1-e^{-tu}}$ est $u \mapsto \ln\left(1-e^{-tu}\right)$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u &= \int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \sum_{k=1}^{+\infty} k \int_k^{k+1} \left[\ln\left(1-e^{-tu}\right)\right]_k^{k+1} - \frac{1}{2}\left[\ln\left(1-e^{-tu}\right)\right]_1^{+\infty} \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \sum_{k=1}^{+\infty} k\left[\ln\left(1-e^{-t(k+1)}\right) - \ln\left(1-e^{-tk}\right)\right] + \frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-t}\right).
\end{aligned}$$

Simplifions les deux premiers termes du membre de droite.

Commençons par $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\left[\ln\left(1-e^{-t(k+1)}\right) - \ln\left(1-e^{-tk}\right)\right]$: pour obtenir $\ln(P(e^{-t}))$, il faudrait faire apparaître la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tk}\right)$. Posons pour abréger :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad a_k = \ln\left(1-e^{-tk}\right),$$

de sorte que la somme à simplifier ci-dessus s'écrive : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k(a_{k+1}-a_k)$. On a alors, pour tout entier $N \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} k\left(a_{k+1}-a_k\right) = \sum_{k=1}^{N} ka_{k+1} - \sum_{k=1}^{N} ka_k = \sum_{k=2}^{N+1}(k-1)a_k - \sum_{k=1}^{N} ka_k &= -\sum_{k=2}^{N+1} a_k + Na_{N+1} - a_1 \\
&= -\sum_{k=1}^{N+1} a_k + Na_{N+1}.
\end{aligned}$$

Les séries $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k(a_{k+1}-a_k)$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} a_k$ convergent : pour la première, cela découle du calcul d'intégrale plus haut, et pour la seconde on note que c'est la série dont la somme apparaît dans la question A.5. Par conséquent, il est sensé de prendre la limite quand $N \to +\infty$ dans cette égalité, et on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(a_{k+1}-a_k\right) = -\sum_{k=1}^{+\infty} a_k + \lim_{N\to+\infty} Na_{N+1}.$$

(Nous avons effectué une transformation d'Abel.) D'après la question A.5., on a : $-\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \ln\left(P(e^{-t})\right)$, et de plus, pour N au voisinage de $+\infty$:

$$Na_{N+1} = N\ln\left(1-e^{-t(N+1)}\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} Ne^{-t(N+1)} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par le théorème des croissances comparées. On a donc montré :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(a_{k+1}-a_k\right) = \ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right),$$

et donc :

$$\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-t}\right).$$

Enfin, pour exprimer l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u$ en fonction de $\int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u$ (l'intégrale qui figure dans l'identité de l'énoncé), nous allons effectuer une intégration par parties :

— en dérivant $u \mapsto u$, qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,+\infty[$ et de dérivée $u \mapsto 1$;

— en intégrant $u \mapsto \frac{t}{e^{tu}-1}$, qui est continue sur $[1,+\infty[$ et dont une primitive est, on l'a vu, $u \mapsto \ln\left(1-e^{-tu}\right)$.

Puisque l'intégrale est généralisée, nous devons préalablement vérifier l'existence du terme $\left[u\ln\left(1-e^{-tu}\right)\right]_1^{+\infty}$. On a :

$$\lim_{u\to+\infty} u\ln\left(1-e^{-tu}\right) = 0,$$

par un calcul analogue à celui effectué plus haut avec Na_{N+1}. Il n'y a donc pas de problème d'existence. La formule de l'intégration par parties nous donne donc :

$$\int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = \left[u\ln\left(1-e^{-tu}\right)\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u = -\ln\left(1-e^{-t}\right) - \int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u.$$

On peut enfin conclure :

$$\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = \left(-\ln\left(1-e^{-t}\right) - \int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u\right) - \ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-t}\right).$$

C'est-à-dire, après simplifications, le résultat voulu :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-t}\right) - \ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) - \int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u.}$$

10. Soit $t>0$. D'après la question précédente :

$$\ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) = -\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-t}\right) - \int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u.$$

Étudions le comportement asymptotique de chaque terme quand $t \to 0^+$. Tout d'abord, on a :

$$\ln\left(1-e^{-t}\right) = \ln\left(t + \underset{t\to0}{o}(t)\right) = \ln\left(t\left(1+\underset{t\to0}{o}(1)\right)\right) = \ln(t) + \ln\left(1+\underset{t\to0}{o}(1)\right).$$

Il découle deux choses de ce développement asymptotique. D'abord, du fait que le second terme tende vers $\ln(1)=0$ quand $t\to0^+$, on a :

$$-\frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-t}\right) = -\frac{\ln(t)}{2} + \underset{t\to0}{o}(1).$$

D'autre part, on en déduit que : $-\ln\left(1-e^{-tu}\right) \sim_{u\to0} -\ln(u) > 0$, et donc que les intégrales $\int_0^1 \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u$ et $\int_0^1 \ln(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature (notons qu'on intègre bien une fonction continue sur $]0,1]$).

Comme la seconde converge (c'est une intégrale de référence), on en déduit que la première converge aussi. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right) \mathrm{d}u &= \int_0^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right) \mathrm{d}u - \int_0^{1} \ln\left(1-e^{-tu}\right) \mathrm{d}u \\ &= \int_0^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right) \mathrm{d}u - \int_0^{1} \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right) \mathrm{d}u - \int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right) \mathrm{d}u - \int_0^{1} \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right) \mathrm{d}u - \ln(t).\end{aligned}$$

La seconde intégrale a pour limite -1 quand $t \to 0^+$ d'après la question B.6. Ensuite, on effectue le changement de variable $v = tu$ dans la première intégrale. Il est licite car affine. On a $\mathrm{d}v = t\mathrm{d}u$, et donc :

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right) \mathrm{d}u = \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} \ln\left(1-e^{-v}\right) \mathrm{d}v = -\frac{\pi^2}{6t}.$$

d'après B.5. Ainsi :

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right) \mathrm{d}u = -\frac{\pi^2}{6t} + 1 - \ln(t) + \underset{t\to 0}{o}(1).$$

Si l'on compile tout ce qu'on a démontré jusqu'à présent dans cette question, on a :

$$\begin{aligned}\ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) &= -\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \frac{\ln(t)}{2} - \left(-\frac{\pi^2}{6t} + 1 - \ln(t)\right) + \underset{t\to 0}{o}(1) \\ &= -\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u + \frac{\ln(t)}{2} + \frac{\pi^2}{6t} - 1 + \underset{t\to 0}{o}(1).\end{aligned}$$

Or, d'après la question B.8, on a : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1 + \underset{t\to 0}{o}(1).$

On a donc, en conclusion :

$$\boxed{\ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) = \frac{\pi^2}{6t} + \frac{\ln(t)}{2} - \frac{\ln(2\pi)}{2} + \underset{t\to 0^+}{o}(1).}$$