# Corrigé du DM ? ?

## Exercice 1 : (niveau Centrale)

**Notations**

$\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$ à cœfficients réels.

$(H_j)_{j\in\mathbb{N}}$ désigne la famille de polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $H_j = \dfrac{1}{j!}\displaystyle\prod_{i=0}^{j-1}(X-i)$.

Pour $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, on note $\dbinom{n}{k}$ le cœfficient binomial $k$ parmi $n$. On a $\dbinom{0}{0} = 1$ et $\dbinom{n}{k} = 0$ si $k > n$.

$[\![a,b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre $a$ et $b$. Ainsi, $[\![a,b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant n \leqslant b\}$.

### A. Une première formule

**Q1.** La série entière réelle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^n$ a pour rayon de convergence 1 et

$$\forall x \in ]-1\,;1[, \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

**Q2.** D'après Q1 et le théorème de dérivation des séries entières, la série entière réelle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} nx^n$ a pour rayon de convergence 1 et par dérivation de la fonction rationnelle $x \mapsto \frac{1}{1-x}$,

$$\forall x \in ]-1\,;1[, \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Donc : $\forall x \in ]-1\,;1[$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n &= 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n\\ &= x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}\\ &= \frac{x}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{la série entière réelle } \sum nx^n \text{ a pour rayon de convergence 1 et } \forall x \in ]-1\,;1[, \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \tfrac{x}{(1-x)^2}.}$$

**Q3.** Montrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(k)$ : la série entière $\sum \binom{n}{k} x^{n-k}$ a pour rayon de convergence 1 et $\forall x \in ]-1\,;1[, \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

**Initialisation** : pour $k = 0$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie d'après Q1.

**Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(k)$, par dérivation de la série entière $\sum\binom{n}{k}x^{n-k}$ qui est de rayon de convergence 1 par hypothèse de récurrence, la série entière $\sum\binom{n}{k}\times(n-k)x^{n-k-1}$ est de rayon de convergence 1 et par dérivation termes à termes et dérivation de la fonction rationnelle $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$ :

$$\forall x \in ]-1\,;1[, \sum_{n=k+1}^{+\infty}\binom{n}{k}(n-k)x^{n-k-1} = \frac{k+1}{(1-x)^{k+2}}$$

or $\forall n \geqslant k+1, \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$, donc, pour tout $x \in ]-1\,;1[$,

$$\sum_{n=k+1}^{+\infty}\binom{n}{k+1}x^{n-k-1} = \frac{1}{(1-x)^{k+2}},$$

d'où $\mathcal{P}(k+1)$.

Donc par principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série entière $\sum_{n\geqslant k}\binom{n}{k}x^{n-k}$ a pour rayon de convergence 1 et $\forall x \in ]-1\,;1[, \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

De plus, pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2, n < k \Rightarrow \binom{n}{k} = 0$. Donc : pour tout $k \in \mathbb{N}$, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\binom{n}{k}x^k$ est 1 et pour tout $x \in ]-1\,;1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n = x^k\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k} = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

$$\boxed{\text{Pour } k \in \mathbb{N}, \text{ la série entière } \sum_{n\geqslant 0}\binom{n}{k}x^n \text{ admet 1 pour rayon de convergence et que, pour tout } x \in ]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.}$$

## B. Utilisation d'une famille de polynômes

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $f_k : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n$.

**Q4.** Soit $k \in \mathbb{N}$, on sait que le rayon de convergence de la série entière $\sum n^k x^n$ est 1, donc :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ f_k \text{ est définie sur } ]-1,1[.}$$

**Q5.** Soit $k \in \mathbb{N}$. La famille $(H_0, \ldots, H_k)$ est une famille de polynômes non nuls de degrés distincts, c'est donc une famille libre de $k+1$ polynômes de $\mathbb{R}_k[X]$ qui est un espace vectoriel de dimension $k+1$.

Donc

$(H_0, \ldots, H_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$ et il existe une unique famille $(\alpha_{k,0}, \ldots, \alpha_{k,k})$ dans $\mathbb{R}^{k+1}$ telle que $X^k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} H_j$, ce sont les coordonnées de $X^k$ dans cette base.

**Q6.** Soit $k \in \mathbb{N}$, alors $X^k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} H_j$ et par évaluation en 0 : $0^k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} H_j(0) = \alpha_{k,0}$. Donc :

$$\boxed{\alpha_{0,0} = 1 \text{ si } k = 0 \text{ et } \forall k \geqslant 1, \alpha_{k,0} = 0.}$$

De plus, $\forall j \in \mathbb{N}, \deg(H_j) = j$ et son coefficient dominant est $\frac{1}{j!}$, donc par identification du coefficient de $X^k$ dans $X^k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} H_j$ : $1 = \alpha_{k,k} \frac{1}{k!}$, donc :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \alpha_{k,k} = k!.}$$

**Q7.** Soit $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leqslant j \leqslant k$. On sait que $X^k = \sum_{i=0}^{k} \alpha_{k,i} H_i$. Donc par évaluation en $j$ :

$$j^k = \sum_{i=0}^{k} \alpha_{k,i} H_i(j)$$

Or, pour $i > j$ : $H_i(j) = \frac{1}{i!} \prod_{m=0}^{i-1} (i-m) = 0$, et pour $i \in [\![0\,;j]\!]$, $\frac{1}{i!} \prod_{m=0}^{i-1} (j-m) = \binom{j}{i}$. Donc :

$$j^k = \sum_{i=0}^{k} \alpha_{k,i} H_i(j) = \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_{k,i} \binom{j}{i} + \alpha_{k,j} \times 1 + 0$$

Donc :

$$\boxed{\text{pour tout couple } (j,k) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } 1 \leqslant j \leqslant k,\ \alpha_{k,j} = j^k - \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} \alpha_{k,i}.}$$

**Q8.** Soit $k \in \mathbb{N}$, on sait que la série entière $\sum n^k x^n$ a pour rayon de convergence 1 et $\forall x \in\, ]-1\,;1[$ :

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} H_j(n) \right) x^n \end{aligned}$$

Or $H_j(n) = \frac{1}{j!} \prod_{i=0}^{j-1} (n-i) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{j!} n^j$ et la série entière $\sum n^j x^n$ a pour rayon de convergence 1, donc toutes les séries entières $\sum H_j(n) x^n$ ont pour rayon de convergence 1 et : $\forall x \in\, ]-1\,;1[$ :

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \sum_{j=0}^{k} \left( \alpha_{k,j} \sum_{n=0}^{+\infty} H_j(n) x^n \right) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \left( \alpha_{k,j} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{j}{n} x^n \right) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \left( \alpha_{k,j} \frac{x^j}{(1-x)^{j+1}} \right) \\ &= \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{j=0}^{k} \left( \alpha_{k,j} x^j (1-x)^{k-j} \right) \\ &= \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \times P_k(x) \end{aligned}$$

avec $P_k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} X^j (1-X)^{k-j}$. De plus si $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in\, ]-1\,;1[, f_k(x) = \frac{Q(x)}{(1-x)^{k+1}}$, alors : $\forall x \in\, ]-1\,;1[, P_k(x) = Q(x)$, ainsi le polynôme $P_k - Q$ a une infinité de racines, il est donc nul. D'où l'unicité de $P_k$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme réel $P_k$ tel que, pour tout $x \in ]-1,1[$, $f_k(x) = \dfrac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$ et que ce polynôme vérifie la relation

$$P_k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} X^j (1-X)^{k-j}.$$

**Q9.** Soit $k \in \mathbb{N}$, d'après la question précédente : $\forall x \in ]-1\,;1[$ :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n = f_k(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$$

Donc par dérivation de la somme d'une série entière (membre de gauche) et d'une fonction rationnelle (membre de droite) : $\forall x \in ]-1\,;1[$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} n^{k+1} x^{n-1} &= \frac{P_k'(x)(1-x)^{k+1} + P_k(x)(k+1)(1-x)^k}{(1-x)^{2k+2}} \\ &= \frac{P_k'(x)(1-x) + P_k(x)(k+1)}{(1-x)^{k+2}}\end{aligned}$$

Donc : $\forall x \in ]-1\,;1[$,

$$f_{k+1}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^{k+1} x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} n^{k+1} x^{n-1} = \frac{P_k'(x)x(1-x) + P_k(x)(k+1)x}{(1-x)^{k+2}}$$

De plus, $\forall x \in ]-1\,;1[, f_{k+1}(x) = \frac{P_{k+1}(x)}{(1-x)^{k+2}}$, donc $P_{k+1}(x) = P_k'(x)x(1-x) + P_k(x)(k+1)x$.

Donc (infinité de racines) :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ P_{k+1} = X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k.}$$

**Q10.** Pour tout $x \in ]-1\,;1[, f_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ et $f_0(x) = \frac{P_0(x)}{1-x}$, donc par unicité de $P_0$ (d'après Q8), $P_0 = 1$. Donc d'après la question précédente : $P_1 = X$ (cohérent avec Q2) et

$$\boxed{\begin{array}{c} P_2 = X(1-X) + 2X^2 = X^2 + X \text{ et} \\ P_3 = X(1-X)(2X+1) + 3X(X^2+X) = X^3 + 4X^2 + X. \end{array}}$$

**Q11.** Montrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(k) : \deg(P_k) = k$ et son coefficient dominant est 1. $\mathcal{P}(0)$ *est vraie, mais dans l'hérédité on préfère avoir* $P_k' \neq 0$.

**Initialisation** : pour $k = 0$, $P_0 = X$ d'où $\mathcal{P}(1)$.

**Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}^*$, on suppose $\mathcal{P}(k)$. On sait que $P_{k+1} = X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k$, or par hypothèse de récurrence $\deg P_k = k \geqslant 1$ et son coefficient dominant est 1, donc $\deg(X(1-X)P_k') = k+1$ et son coefficient dominant est $-k$ et $\deg((k+1)XP_k) = k+1$ et son coefficient dominant est $k+1$, donc $\deg(P_{k+1}) \leqslant k+1$ et son coefficient d'ordre $k+1$ est $-k+k+1 = 1$, d'où $\mathcal{P}(k+1)$.

De plus $\deg(P_0) = 0$ et son coefficient dominant est 1. Donc par principe de récurrence :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ le degré de } P_k \text{ est } k \text{ son cœfficient dominant est 1.}}$$

**Q12.** Montrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*\ \mathcal{P}(k) : \forall x \in ]0\,;1[, x^{k+1}P_k(\frac{1}{x}) = P_k(x)$.

**Initialisation** pour k = 1,
$P_1 = X$ et $\forall x \in ]0\,;1[, x^2P_1(\frac{1}{x}) = x$, d'où $\mathcal{P}(1)$.

**Hérédité** soit $k \in \mathbb{N}^*$, on suppose $\mathcal{P}(k) : \forall x \in ]0\,;1[, x^{k+1}P_k(\frac{1}{x}) = P_k(x)$. Par opération sur les fonctions dérivables : $\forall x \in ]0\,;1[, (k+1)x^kP_k(\frac{1}{x}) - x^{k-1}P_k'(\frac{1}{x}) = P_k'(x)$. Par évaluation de la relation obtenue à la question Q9 en $\frac{1}{x}$ on obtient : $\forall x \in ]0\,;1[$

$$\begin{aligned}x^{k+2}P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) &= x^{k+1}(1-\frac{1}{x})P_k'(\frac{1}{x}) + (k+1)x^{k+1}P_k(\frac{1}{x}) \\ &= x^2(1-\frac{1}{x})x^{k-1}P_k'(x) + (k+1)P_k(x) \\ &= x^2(1-\frac{1}{x})((k+1)x^kP_k(\frac{1}{x}) - P_k'(x)) + (k+1)P_k(x) \\ &= (x-1)(k+1)x^{k+1}P_k(\frac{1}{x}) + x(1-x)P_k'(x) + (k+1)P_k(x) \\ &= x(k+1)P_k(x) + x(1-x)P_k'(x) \\ &= P_{k+1}(x)\end{aligned}$$

d'où $\mathcal{P}(k+1)$

Donc, par principe de récurrence,

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } x \in ]0,1[,\ x^{k+1}P_k\left(\frac{1}{x}\right) = P_k(x).}$$

**Q13.** Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in [\![0\,;k]\!]$. On sait que $P_k$ est un polynôme unitaire de degré $k$, donc il existe $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ tels que $P_k = \sum_{j=0}^{k} a_j X^j$ (avec $a_k = 1$).

D'après la question précédente, pour tout $x \in ]0\,;1[$ :

$$\begin{aligned}P_k(x) &= x^{k+1}\sum_{j=0}^{k} a_j x^{-j} \\ &= \sum_{j=0}^{k} a_j x^{k+1-j} \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} x^i\end{aligned}$$

Le polynôme $P_k - \sum_{i=1}^{k+1} a_{k+1-i}x^i$ a donc une infinité de racines, il est donc nul et par unicité des coefficients :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall j \in [\![0\,;k]\!], \text{ les coefficients de degré } j \text{ et } k+1-j \text{ de } P_k \text{ sont égaux.}}$$

## C. Une dernière formule

On s'intéresse dans cette sous-partie à la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} x^n$ dont on note $R$ le rayon de convergence.

**Q14.** On sait que la fonction $x \mapsto (1+x)^{-\frac{1}{2}}$ est développable en série entière sur $]-1\,;1[$ et que la série entière a pour rayon de convergence 1.

Donc : $f : x \mapsto (1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ est développable en série entière sur $]-\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}[$, le rayon de convergence de sa série entière est $\frac{1}{4}$ et $\forall x \in ]-\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)(-4)^n}{n!} \\ &= \frac{2^n \times 1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{n!} \\ &= \frac{2^n (2n)!}{2 \times \cdots \times (2n) \times n!} \\ &= \frac{(2n)!}{n!^2} \\ &= \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

On reconnait les coefficients de la série entière considérée. Donc :

$$\boxed{R = \tfrac{1}{4} \text{ et pour tout } x \in ]-R, R[, \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}.}$$

**Q15.** On considère la série entière $\sum \binom{2n}{n} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ; d'après le théorème de dérivation des séries entières, son rayon de convergence est celui de la série entière $\sum \binom{2n}{n} x^n$ c'est à dire $\frac{1}{4}$ (d'après Q14) et pour tout $x \in ]-R\,;R[$ en notant $f$ la somme de la série entière $\sum \binom{2n}{n} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$$

de plus $f(0) = 0$ donc $f$ est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ sur $]-\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}[$ qui s'annule en 0, d'où : $\forall x \in ]-R\,;R[$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{n+1}}{n+1} &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-4t}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} \end{aligned}$$

Donc : $\forall x \in ]-R\,;R[ \setminus \{0\}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1} &= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{pour tout } x \in ]-R, R[\setminus\{0\}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.}$$

**Q16.** Par produit de Cauchy des séries entières $\sum \binom{2n}{n} x^n$ et $\sum \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1}$ qui sont de rayon de convergence $\frac{1}{4}$ : $\forall x \in ]-R\,;R[ \setminus \{0\}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} x^n &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1}\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n\right) \\ &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \times \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \\ &= \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{pour tout } x \in ]-R, R[\setminus\{0\}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} x^n = \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1\right).}$$

**Q17.** Pour tout $x \in ]-R\,;R[$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1\right) &= \frac{1}{2x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n - 1\right) \\ &= \frac{1}{2x} \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k+2}{k+1} x^{k+1} \qquad \text{(changement d'indice } k = n-1) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k+2}{k+1} x^k$$

Or : pour tout $x \in \left]-R\,;R\right[$ :

$$\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} x^n$$

donc, par unicité du développement en série entière sur un voisinage à droite de 0 :

$$\boxed{\begin{gathered}\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\\ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}.\end{gathered}}$$