DEVOIR SURVEILLÉ 4 – Sujet CCINP   10/01/24   Durée 4h

Ce sujet est composé de deux problèmes indépendants.

Problème 1

Ce problème est constitué de quatre parties, très largement indépendantes.

Partie I - Convergence d'une suite

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\alpha_n = \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \big(\cos(u)\big)^m \mathrm{d}u.$$

Q1. Calculer I_0 et I_1.

Q2. Montrer que la suite $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Q3. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$I_{m+2} = \frac{m+1}{m+2} I_m.$$

Q4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{2n+1} = \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)\alpha_n} \text{ et } I_{2n} = \frac{\pi}{\sqrt{2n}}\alpha_n.$$

Q5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 \leqslant \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leqslant \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}.$$

En déduire que :

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2n}} \leqslant 2\pi\alpha_n^2 \leqslant 1.$$

Q6. En déduire la convergence de la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ lorsque n tend vers l'infini, puis que :

$$I_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Partie II - Calcul d'une intégrale de Gauss

Q7. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge. On note K sa valeur.

Le but du reste de cette partie est de déterminer K explicitement.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose :

$$u_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant t < \sqrt{n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q8. Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$.

Q9. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 + x \leqslant e^x$, et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant u_n(t) \leqslant e^{-t^2}.$$

Q10. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

Q11. À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{n}\sin(u)$ dans l'intégrale J_n et de la question **Q6.**, déterminer la limite de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Q12. En déduire la valeur explicite de K.

Partie III - Solutions développables en série entière d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle suivante :

$$xy''(x) + y'(x) - 4xy(x) = 0. \qquad (E)$$

Le but de cette partie est de déterminer les solutions développables en série entière de cette équation différentielle.

On fixe une suite de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence $r > 0$. On définit la fonction $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Q13. Montrer que f est solution de (E) sur l'intervalle $]-r, r[$ si et seulement si $a_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)^2 a_{n+1} - 4a_{n-1} = 0$.

Q14. En déduire que si f est solution de (E) sur $]-r, r[$ alors :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ a_{2k+1} = 0 \text{ et } a_{2k} = \frac{a_0}{(k!)^2}.$$

Q15. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n!)^2} x^{2n}$ et montrer que sa somme est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Partie IV - Une expression intégrale des solutions

Q16. Soit φ une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et T-périodique (où T est un réel strictement positif).
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_T^{x+T} \varphi(u)\mathrm{d}u = \int_0^x \varphi(u)\mathrm{d}u$$

et en déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_x^{x+T} \varphi(u)\mathrm{d}u = \int_0^T \varphi(u)\mathrm{d}u.$$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(2x\cos(t))\mathrm{d}t.$$

Q17. Étudier la parité de la fonction F.
*On pourra utiliser le changement de variable $u = \pi - t$ et le résultat de la question **Q16**.*

Q18. Donner le développement en série entière de la fonction exponentielle et son domaine de validité.

Q19. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{2\pi n!}\left(\int_0^{2\pi} (\cos(t))^n \mathrm{d}t\right) x^n.$$

Q20. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{2\pi} (\cos(t))^{2k+1}\mathrm{d}t = 0 \text{ et } \int_0^{2\pi} (\cos(t))^{2k}\mathrm{d}t = 4I_{2k}$$

(I_{2k} a été définie en Partie I).
En déduire le développement en série entière de F.

Problème 2 : Étude d'une famille de séries entières

Dans tout le problème, α désigne un nombre réel. On note $\mathscr{D}_\alpha$ l'ensemble des réels x pour lesquels la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est convergente et on pose, pour tout $x \in \mathscr{D}_\alpha$:

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}.$$

Objectifs

Ce problème est composé de trois parties indépendantes.

Dans la Partie I, on étudie quelques propriétés élémentaires des fonctions f_α.

L'objectif de la Partie II est de construire un logarithme complexe.

Enfin, la Partie III permet d'obtenir un équivalent de $f_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 1, dans le cas $\alpha \in]0,1[$.

Partie I - Quelques propriétés des fonctions f_α

Q21. Déterminer le rayon de convergence commun aux séries entières définissant les fonctions f_α.

Q22. Montrer que :
a) si $\alpha \in]-\infty, 0]$ alors $\mathscr{D}_\alpha =]-1, 1[$,
b) si $\alpha \in]0, 1]$ alors $\mathscr{D}_\alpha = [-1, 1[$,
c) si $\alpha \in]1, +\infty[$ alors $\mathscr{D}_\alpha = [-1, 1]$.

Q23. On suppose dans cette question $\alpha > 0$. Déterminer, pour tout $x \in \mathscr{D}_\alpha$, le signe de $f_\alpha(x)$.

Q24. Déterminer f_0 et montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$f_{-1}(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad f_1(x) = -\ln(1-x).$$

Q25. Soit $\alpha > 1$. Prouver que f_α est continue sur $[-1, 1]$.

Q26. Soit $\alpha \leqslant 1$. Prouver que $\lim\limits_{x \to 1^-} f_\alpha(x) = +\infty$. *On pourra comparer* f_α *à* f_1.

Partie II - Un logarithme complexe

Q27. Donner sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction qui à $x \in]-1, 1[$ associe $\ln(1+x)$.

Pour tout nombre complexe z, tel que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{(-z)^n}{n}$ est convergente, on note : $S(z) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n}$.

Q28. Donner le rayon de convergence R de la série entière définissant S.
Pour tout x réel élément de $]-R, R[$, déterminer la valeur de $\exp(S(x))$.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| < R$. On considère la série entière de la variable *réelle* t suivante :

$$\sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{z_0^n}{n} t^n.$$

En cas de convergence, on note $g(t)$ sa somme.
On a donc, pour $t \in \mathbb{R}$ tel que la série est convergente, $g(t) = S(tz_0)$.

Q29. On note r le rayon de convergence de la série entière définissant g.
Montrer que si $z_0 = 0$ alors $r = +\infty$ et si $z_0 \neq 0$ alors $r = \frac{1}{|z_0|}$.

Q30. Prouver que g est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, 1]$.
Déterminer $g'(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Q31. On pose $h = \exp \circ g$. Prouver que pour tout $t \in [0, 1]$:

$$h'(t) = \frac{z_0}{1 + tz_0} h(t).$$

Q32. Montrer que la fonction $t \mapsto 1 + tz_0$ est une solution de l'équation différentielle $y'(t) = \frac{z_0}{1 + tz_0} y(t)$ sur $[0, 1]$. En déduire que :

$$\exp(S(z_0)) = z_0 + 1.$$

Partie III- Un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1 dans le cas où $\alpha \in]0,1[$

Dans toute cette partie, on suppose que $\alpha \in]0,1[$. L'objectif est de donner un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1.

Pour tout $x \in]0,1[$, on considère l'intégrale : $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\mathrm{d}t$.

Q33. Justifier que, pour tout $x \in]0,1[$, l'intégrale $I(x)$ est convergente.

Q34. On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall s \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.
Pour tout $x \in]0,1[$, à l'aide d'un changement de variable, montrer que :

$$I(x) = (-\ln x)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha).$$

Q35. Prouver que, pour tout $x \in]0,1[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{x^t}{t^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q36. En déduire, pour tout $x \in]0,1[$, l'encadrement :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant f_\alpha(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\mathrm{d}t.$$

Q37. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$.

Q38. En déduire un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1.