CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 4 - Sujet 1

Problème 1 (inspiré CCINP 2022 PSI et E3A PSI 2022)

Q1. Remarquons que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $u \mapsto \big(\cos u\big)^m$ est continue sur le segment $[0,\pi/2]$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\big(\cos(u)\big)^m \mathrm{d}u$ est bien définie.
On a :

$$I_0 = \int_0^{\pi/2}\big(\cos(u)\big)^0 \mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} 1\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$$

et

$$I_1 = \int_0^{\pi/2}\big(\cos(u)\big)^1 \mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \cos(u)\mathrm{d}u = [\sin(u)]_0^{\pi/2} = 1.$$

$$\boxed{I_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } I_1 = 1.}$$

Q2. Soit $m \in \mathbb{N}$. On a par linéarité de l'intégrale :

$$I_m - I_{m+1} = \int_0^{\pi/2} (\cos u)^m (1-\cos u)\mathrm{d}u.$$

Or, pour tout $u \in [0,\pi/2]$, $\cos(u) \in [0,1]$ donc $(\cos u)^m(1-\cos u) \geqslant 0$.
On en déduit par positivité de l'intégrale $(0 \leqslant \frac{\pi}{2})$ que $I_m - I_{m+1} \geqslant 0$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } (I_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

Q3. Soit $m \in \mathbb{N}$. On a par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I_{m+2} &= \int_0^{\pi/2} (\cos u)^{m+1} \cos u \mathrm{d}u \\
&= [(\cos u)^{m+1}\sin u]_0^{\pi/2} - (m+1)\int_0^{\pi/2} (-\sin u)(\cos u)^m \sin u \mathrm{d}u \\
&= 0 + (m+1)\int_0^{\pi/2} (\cos u)^m (1-\cos^2 u)\mathrm{d}u \\
&= (m+1)(I_m - I_{m+2})
\end{aligned}$$

par linéarité.
On en déduit que $(m+2)I_{m+2} = (m+1)I_m$ d'où :

$$\boxed{I_{m+2} = \frac{m+1}{m+2} I_m.}$$

Q4. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{2n+1} = \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)\alpha_n} \text{ et } I_{2n} = \frac{\pi}{\sqrt{2n}}\alpha_n$$

c'est-à-dire après simplifications :

$$\mathscr{P}(n) : \text{« } I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \text{ et } I_{2n} = \frac{(2n)!\pi}{(n!)^2 2^{2n+1}} \text{ ».}$$

Initialisation : Pour $n=1$, on a par les questions **Q3** et **Q1** :

$$I_3 = \frac{2}{3}I_1 = \frac{2}{3} \text{ et } I_2 = \frac{1}{2}I_0 = \frac{\pi}{4}.$$

Et on a par ailleurs :

$$\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^2}{3\times 2} = \frac{2}{3} \text{ et } \frac{(2n)!\pi}{(n!)^2 2^{2n+1}} = \frac{2\pi}{2^3} = \frac{\pi}{4}.$$

On en déduit que $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
On a par la question **Q3** et par hypothèse de récurrence :

$$I_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3}I_{2n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n+1}n!(n+1)!}{(2n+3)(2n+1)!} = \frac{2(n+1)}{2n+2}\frac{2^{2n+1}n!(n+1)!}{(2n+3)(2n+1)!} = \frac{2^{2n+2}((n+1)!)^2}{(2n+3)!}.$$

De même, on a :

$$I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}I_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2}\frac{(2n)!\pi}{(n!)^2 2^{2n+1}} = \frac{(2n+1)!\pi}{(n+1)!n!2^{2n+2}} = \frac{2n+2}{2(n+1)}\frac{(2n+1)!\pi}{(n+1)!n!2^{2n+2}} = \frac{(2n+2)!\pi}{((n+1)!)^2 2^{2n+3}}.$$

Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par récurrence, on a ainsi prouvé que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ I_{2n+1} = \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)\alpha_n} \text{ et } I_{2n} = \frac{\pi}{\sqrt{2n}}\alpha_n.}$$

Q5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la question **Q2**, on a :

$$I_{2n+1} \leqslant I_{2n} \leqslant I_{2n-1}.$$

Comme $I_{2n+1} > 0$ (d'après l'expression trouvée en **Q4**), on obtient donc en divisant par I_{2n+1} :

$$\boxed{1 \leqslant \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leqslant \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}.}$$

Or, d'après **Q3**, on a $I_{2n+1} = \dfrac{2n}{2n+1}I_{2n-1}$ donc $\dfrac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = 1 + \dfrac{1}{2n}$ et d'après **Q4** :

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{\pi}{\sqrt{2n}}\alpha_n \frac{2(2n+1)\alpha_n}{\sqrt{2n}} = 2\pi\alpha_n^2\frac{2n+1}{2n} = 2\pi\alpha_n^2\left(1+\frac{1}{2n}\right).$$

On obtient donc :

$$1 \leqslant 2\pi\alpha_n^2\left(1+\frac{1}{2n}\right) \leqslant 1 + \frac{1}{2n}$$

d'où :

$$\boxed{\frac{1}{1+\frac{1}{2n}} \leqslant 2\pi\alpha_n^2 \leqslant 1.}$$

Q6. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{2n}} = 1$, on déduit de **Q5** par le théorème des gendarmes que :

$$\lim_{n\to+\infty} 2\pi\alpha_n^2 = 1$$

donc par continuité de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |\alpha_n| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n \geqslant 0$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (\alpha_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers } \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.}$$

Cette limite étant non nulle, on a $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$. D'après **Q4**, on a alors :

$$I_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2n}}{2(2n)\alpha_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{2n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

$$\boxed{I_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.}$$

Q7. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$.
$\star$ On a $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$ (par composition des limites $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} ue^{-u} = 0$ par croissances comparées).
Ainsi, $e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, pour tout $t \in [1, +\infty[$, $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$ et l'ntégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann en $+\infty$ avec $2 > 1$).
Par comparaison, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge.
Par la continuité de la fonction intégrée, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge.
$\star$ Par le changement de variable affine $u = -t$, on obtient que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ est de même nature, et en cas de convergence, de même valeur, que l'intégrale $\displaystyle\int_{+\infty}^{0} e^{-(-u)^2}(-\mathrm{d}u) = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u$.
Cette dernière intégrale étant convergente par ce qui précède, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Pour la suite, on notera également que sa valeur K vérifie :

$$K = \int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Q8. Soit $t \in \mathbb{R}_+$.
Notons $n_0 = \lfloor t^2 \rfloor + 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$ (donc à partir d'un certain rang), on a $n \geqslant n_0 > t^2$ donc $\sqrt{n} > t$ donc :

$$u_n(t) = \underbrace{\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)}_{>0}^{n} = \exp\left(n\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)\right) = \exp\left(n\left(-\frac{t^2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(-t^2 + \underset{n\to+\infty}{o}(1))$$

puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-t^2}{n} = 0$.
Par continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(t) = e^{-t^2}$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite de fonctions } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}_+ \text{ vers la fonction } t \mapsto e^{-t^2}.}$$

Q9. La fonction exponentielle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp''(x) = \exp(x) \geqslant 0$.
On en déduit que la fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$.
Sa courbe représentative se situe donc au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0 qui a pour équation $y = \exp'(0)(x - 0) + \exp(0)$ c'est-à-dire $y = x + 1$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ 1 + x \leqslant e^x.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in \mathbb{R}_+$.
Si $t \geqslant \sqrt{n}$ alors $u_n(t) = 0$ donc on a clairement $0 \leqslant u_n(t) \leqslant e^{-t^2}$.
Si $t < \sqrt{n}$ alors $u_n(t) = \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n$.
En appliquant le résultat précédent avec $x = -\dfrac{t^2}{n}$, on obtient $0 \leqslant 1 - \dfrac{t^2}{n} \leqslant \exp\left(-\dfrac{t^2}{n}\right)$.
Par croissance de la fonction $u \mapsto u^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que :

$$0 \leqslant u_n(t) \leqslant \left(\exp\left(-\frac{t^2}{n}\right)\right)^n = e^{-t^2}.$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant u_n(t) \leqslant e^{-t^2}.}$$

Q10. Les hypothèses du théorème de convergence dominée sont vérifiées puisque :
- d'après **Q8**, la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $u : t \mapsto e^{-t^2}$ (les fonctions u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et u étant continues (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$),
- d'après **Q9**, en posant $\varphi : t \mapsto e^{-t^2}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|u_n(t)| \leqslant \varphi(t)$ et la fonction φ est intégrable sur $[0, +\infty[$ d'après **Q7** (fonction continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ dont l'intégrale converge absolument).

On en déduit par le théorème de convergence dominée que les fonctions u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et u sont intégrables sur $[0, +\infty[$ et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} u(t)\mathrm{d}t.$$

Par la relation de Chasles et la définition des fonctions u_n, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t.}$$

Q11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Posons le changement de variable $t = \sqrt{n}\sin(u)$ dans l'intégrale (ordinaire) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$.
On a $\mathrm{d}t = \sqrt{n}\cos(u)\mathrm{d}u$, $\sqrt{n}\sin(0) = 0$ et $\sqrt{n}\sin(\pi/2) = \sqrt{n}$ donc on obtient :

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{n\sin^2 u}{n}\right)^n \sqrt{n}\cos(u)\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \sin^2 u\right)^n \sqrt{n}\cos(u)\mathrm{d}u = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} (\cos(u))^{2n+1}\mathrm{d}u$$

donc

$$J_n = \sqrt{n} I_{2n+1}.$$

En utilisant la question **Q6**, on obtient alors :

$$J_n \sim \sqrt{n} \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Q12. On déduit des questions **Q10** et **Q11** que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Par la remarque formulée à la fin de la **Q7**, on en déduit que :

$$\boxed{K = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}.}$$

Q13. En tant que somme d'une série entière, on sait que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle de convergence et les dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme sur cet intervalle.
On a donc pour tout $x \in]-r,r[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ et } f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}.$$

On a alors pour tout $x \in]-r,r[$:

$$\begin{aligned}
xf''(x) + f'(x) - 4xf(x) &= x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - 4\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + a_1 - 4\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n \\
&= a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)n a_{n+1} + (n+1)a_{n+1}x^n - 4a_{n-1}\right) x^n \\
&= a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)^2 a_{n+1} - 4a_{n-1}\right) x^n.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
f \text{ est solution de } (E) \text{ sur }]-r,r[&\Leftrightarrow \forall x \in]-r,r[,\ xf''(x) + f'(x) - 4xf(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in]-r,r[,\ a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)^2 a_{n+1} - 4a_{n-1}\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 0x^n.
\end{aligned}$$

Par unicité des cœfficients d'un développement en série entière ($r > 0$), on en déduit :

$$\boxed{f \text{ est solution de } (E) \text{ sur }]-r,r[\Leftrightarrow a_1 = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)^2 a_{n+1} - 4a_{n-1} = 0.}$$

Q14. On suppose que f est solution de (E) sur $]-r,r[$.
D'après **Q13**, on a donc $a_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)^2 a_{n+1} - 4a_{n-1} = 0$ donc $a_{n+1} = \dfrac{4}{(n+1)^2} a_{n-1}$.
Montrons alors par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathscr{P}(k) : \text{« } a_{2k+1} = 0 \text{ et } a_{2k} = \frac{a_0}{(k!)^2} \text{ ».}$$

Initialisation : $\mathscr{P}(0)$ est vraie car $a_1 = 0$ et $0! = 1$.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(k)$ est vraie.
On a d'après ce qui précède et par hypothèse de récurrence :

$$a_{2k+3} = \frac{4}{(2k+3)^2} a_{2k+1} = \frac{4}{(2k+3)^2} \times 0 = 0$$

et

$$a_{2k+2} = \frac{4}{(2k+2)^2} a_{2k} = \frac{4}{4(k+1)^2} \frac{a_0}{(k!)^2} = \frac{a_0}{(k+1)!^2}.$$

Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
On a donc prouvé par récurrence que :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ a_{2k+1} = 0 \text{ et } a_{2k} = \frac{a_0}{(k!)^2}.}$$

Q15. Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n!)^2} x^{2n}$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
On sait que $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ (terme général de la série exponentielle, qui est convergente) donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2 = 0$.
On en déduit que $x \leqslant R$.
Comme pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x \leqslant R$, on en déduit que :

$$\boxed{R = +\infty.}$$

On constate que $R > 0$.
De plus, si on note $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les cœfficients de cette série entière, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $b_{2k+1} = 0$ et $b_{2k} = \frac{1}{(k!)^2}$.
On vérifie alors sans difficulté que $b_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_{n+1} = \frac{4}{(n+1)^2} b_{n-1}$ (en distinguant les cas n pair et n impair).
Par la question **Q13**, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la somme de la série entière } \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n!)^2} x^{2n} \text{ est solution de } (E) \text{ sur }]-R, R[= \mathbb{R}.}$$

Q16. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Les intégrales considérées sont « ordinaires » (intégrales de fonction continue sur un segment).
Par le changement de variable affine $t = u - T$, on a :

$$\int_T^{x+T} \varphi(u)\mathrm{d}u = \int_0^x \varphi(t+T)\mathrm{d}t = \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t$$

par T-périodicité de φ.
Par la relation de Chasles, on a :

$$\int_x^{x+T} \varphi(u)\mathrm{d}u = \int_x^T \varphi(u)\mathrm{d}u + \int_T^{x+T} \varphi(u)\mathrm{d}u$$

donc en utilisant l'égalité précédente :

$$\int_x^{x+T} \varphi(u)\mathrm{d}u = \int_x^T \varphi(u)\mathrm{d}u + \int_0^x \varphi(u)\mathrm{d}u$$

puis de nouveau la relation de Chasles :

$$\int_x^{x+T} \varphi(u)\mathrm{d}u = \int_0^T \varphi(u)\mathrm{d}u.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ \int_T^{x+T} \varphi(u)\mathrm{d}u = \int_0^x \varphi(u)\mathrm{d}u \text{ et } \int_x^{x+T} \varphi(u)\mathrm{d}u = \int_0^T \varphi(u)\mathrm{d}u.}$$

Q17. Notons que la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \exp(2x\cos(t))$ est continue sur le segment $[0, 2\pi]$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$F(-x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(2(-x)\cos t)\mathrm{d}t.$$

Posons le changement de variable affine $u = \pi - t$. On obtient :

$$F(-x) = \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{-\pi} \exp(-2x\cos(\pi - u))(-\mathrm{d}u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-2x(-\cos u))\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(2x\cos u)\mathrm{d}u.$$

Or, la fonction $u \mapsto \exp(2x\cos u)$ est 2π périodique, donc en utilisant la question **Q16** avec $x = -\pi$, on obtient :

$$F(-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\pi+2\pi} \exp(2x\cos u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(2x\cos u)\mathrm{d}u = F(x).$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } F \text{ est paire.}}$$

Q18. Pour le cours, on sait que :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.}$$

Q19. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a par la question précédente :

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x\cos t)^n}{n!}\mathrm{d}t.$$

Justifions qu'il est possible d'intervertir les symboles intégrale et somme infinie.
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto \dfrac{2^n x^n (\cos t)^n}{n!}$.
⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction continue sur le segment $[0, 2\pi]$.
⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a pour tout $t \in [0, 2\pi]$:

$$|f_n(t)| \leqslant \frac{2^n x^n}{n!} \text{ puisque } |\cos t| \leqslant 1.$$

On en déduit que $\dfrac{2^n x^n}{n!}$ (réel indépendant de t) est un majorant de l'ensemble $\{|f_n(t)|, t \in [0, 2\pi]\}$ et $\|f_n\|_\infty^{[0,2\pi]}$ est le plus petit des majorants de cet ensemble.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant \|f_n\|_\infty^{[0,2\pi]} \leqslant \frac{2^n x^n}{n!}.$$

Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{2^n x^n}{n!}$ converge (série exponentielle de somme e^{2x}), on en déduit par comparaison par inégalité que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \|f_n\|_\infty^{[0,2\pi]}$ converge.
Ainsi, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[0, 2\pi]$.
Par le théorème d'interversion, on en déduit que :

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} \frac{(2x\cos t)^n}{n!}\mathrm{d}t.$$

Ainsi, par linéarité, on obtient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{2\pi n!}\left(\int_0^{2\pi} (\cos(t))^n \mathrm{d}t\right) x^n.}$$

Q20. D'après la question **Q17.**, la fonction F est paire donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{2\pi n!}\left(\int_0^{2\pi} (\cos(t))^n \mathrm{d}t\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{2\pi n!}\left(\int_0^{2\pi} (\cos(t))^n \mathrm{d}t\right) (-x)^n.$$

Par unicité des cœfficients d'un développement en série entière, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{2^n}{2\pi n!}\left(\int_0^{2\pi} (\cos(t))^n \mathrm{d}t\right) = (-1)^n \frac{2^n}{2\pi n!}\left(\int_0^{2\pi} (\cos(t))^n \mathrm{d}t\right)$$

d'où :

$$\int_0^{2\pi} (\cos(t))^n \mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^{2\pi} (\cos(t))^n \mathrm{d}t.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\int_0^{2\pi} (\cos(t))^{2k+1} \mathrm{d}t = -\int_0^{2\pi} (\cos(t))^{2k+1} \mathrm{d}t$$

d'où :

$$\boxed{\int_0^{2\pi} (\cos(t))^{2k+1} \mathrm{d}t = 0.}$$

Comme $t \mapsto (\cos t)^n$ est 2π-périodique, on a par la question **Q16.** :

$$\int_0^{2\pi} (\cos t)^{2k} \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t)^{2k} \mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} (\cos t)^{2k} \mathrm{d}t$$

par parité de la fonction intégrée (par le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} (\cos t)^{2k} \mathrm{d}t$).
De plus, par le changement de variable $u = \pi - t$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} (\cos t)^{2k} \mathrm{d}t$, on obtient :

$$\int_{\pi/2}^{\pi} (\cos t)^{2k} \mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{0} (\cos(\pi - u))^{2k} (-\mathrm{d}u) = \int_0^{\pi/2} (-\cos u)^{2k} \mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} (\cos u)^{2k} \mathrm{d}u.$$

Ainsi, par la relation de Chasles :

$$\int_0^{\pi} (\cos t)^{2k} \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2k} \mathrm{d}t + \int_{\pi/2}^{\pi} (\cos t)^{2k} \mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2k} \mathrm{d}t = 2I_{2k}$$

d'où :

$$\boxed{\int_0^{2\pi} (\cos(t))^{2k} \mathrm{d}t = 4I_{2k}.}$$

Q20. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{2k}}{2\pi(2k)!} 4I_{2k} x^{2k}.$$

On a vu à la question **Q4** que $I_{2k} = \dfrac{(2k)!\pi}{(k!)^2 2^{2k+1}}$.
Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{2k+2}}{2\pi(2k)!} \frac{(2k)!\pi}{(k!)^2 2^{2k+1}} x^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k!)^2} x^{2k}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k!)^2} x^{2k}.}$$

*N.B. : On retrouve la solution de l'équation différentielle de la question **Q15.***

Problème 2 : étude d'une famille de séries entières (d'après CCINP 2021 PSI)

Q21. On sait par le cours que le rayon de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^\beta x^n$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ est 1. En appliquant ce résultat avec $\beta = -\alpha$, on obtient que :

$$\boxed{\text{pour tout } \alpha \in \mathbb{R},\ R\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^\alpha}\right) = 1.}$$

Q22. $\mathscr{D}_\alpha$ est l'ensemble de définition d'une somme de série entière de rayon de convergence égal à 1 donc d'après le cours, on a :

$$]-1,1[\subset \mathscr{D}_\alpha \subset [-1,1].$$

Il reste à discuter, selon la valeur de α, de la nature des séries $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^\alpha}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

On sait que la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha>1$.

On en déduit que $1\in\mathscr{D}_\alpha$ si et seulement si $\alpha>1$.

Étudions maintenant la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

Si $\alpha\in]-\infty,0]$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha>0 \\ 1 & \text{si } \alpha=0.\end{cases}$ Comme la suite $\left(\left|\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right|\right)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas vers 0 alors la suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas vers 0 et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ diverge donc grossièrement.

On peut donc déjà conclure que :

$$\boxed{a)\text{ si } \alpha\in]-\infty,0] \text{ alors } \mathscr{D}_\alpha =]-1,1[.}$$

Si $\alpha\in]0,1]$ alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est une série alternée car pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^\alpha}\geqslant 0$. Comme la suite $\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0 et est décroissante (car $\alpha>0$), on en déduit par le critère spécial des séries alternées que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

Ainsi :

$$\boxed{b)\text{ si } \alpha\in]0,1] \text{ alors } \mathscr{D}_\alpha = [-1,1[.}$$

Si $\alpha\in]1,+\infty[$ alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge absolument puisque la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge.

Ainsi :

$$\boxed{c)\text{ si } \alpha\in]1,+\infty[\text{ alors } \mathscr{D}_\alpha = [-1,1].}$$

Q23. Soit $x\in\mathscr{D}_\alpha$.

Si $x\geqslant 0$ alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{x^n}{n^\alpha}\geqslant 0$ donc par somme, $f_\alpha(x)\geqslant 0$.

Si $x<0$ alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{x^n}{n^\alpha} = \sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n(-x)^n}{n^\alpha}$ est une série alternée car pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{(-x)^n}{n^\alpha}\geqslant 0$. Comme la suite $\left(\dfrac{|x|^n}{n^\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0 (comme $|x|\leqslant 1$, c'est le produit d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers 0 puisque $\alpha>0$) et est décroissante (en tant que produit de deux suites décroissantes et positives), on en déduit par le critère spécial des séries alternées que la somme $\sum\limits_{n=1}\dfrac{x^n}{n^\alpha}$ est du signe de son premier terme donc $f_\alpha(x)$ est du signe de x donc $f_\alpha(x)\leqslant 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x\in\mathscr{D}_\alpha,\ f_\alpha(x)\geqslant 0 \text{ si } x\geqslant 0 \text{ et } f_\alpha(x)\leqslant 0 \text{ si } x\leqslant 0.}$$

Q24. On sait par le cours (série géométrique) que :

$$\boxed{\text{pour tout } x\in]-1,1[,\ f_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.}$$

On sait que pour tout $x\in]-1,1[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$.

En tant que somme d'une série entière, on peut dériver $x\mapsto\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n$ terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence. On en déduit que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

En multipliant par x, on obtient :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]-1,1[,\ f_{-1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.}$$

On sait que pour tout $u \in]-1,1[$, $\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$.
Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$, comme $-x \in]-1,1[$, on a :

$$\ln(1-u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (-1)^n x^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]-1,1[,\ f_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).}$$

Q25. *Erreur d'énoncé :* $]-1,1[$ *au lieu de* $[-1,1]$.
Avec $]-1,1[$, il est facile de répondre à la question posée : en tant que somme d'une série entière, f_α est continue sur son intervalle ouvert de convergence donc f_α est continue sur $]-1,1[$ (et ceci est vrai pour tout réel α).
L'énoncé d'origine demandait de prouver la continuité sur $[-1,1]$ dans le cas $\alpha > 1$. Prouvons ceci.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $g_n : x \mapsto \frac{x^n}{n^\alpha}$.
⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue sur $[-1,1]$ (fonction polynômiale).
⋆ On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|g_n\|_\infty^{[-1,1]} = \sup_{x\in[-1,1]} \frac{|x|^n}{n^\alpha} = \sup_{x\in[0,1]} \frac{x^n}{n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}$ par parité puis croissance de la fonction sur $[0,1]$.
Or, la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ($\alpha > 1$).
On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-1,1]$.
Ainsi, par le théorème de continuité des sommes de séries de fonctions :

$$\boxed{\text{la fonction } f_\alpha \text{ est continue sur } [-1,1].}$$

Q26. Soit $x \in [0,1[$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < n^\alpha \leqslant n$ donc $\frac{x^n}{n^\alpha} \geqslant \frac{x^n}{n}$ (puisque $x^n \geqslant 0$) d'où par somme (séries convergentes) : $f_\alpha(x) \geqslant f_1(x)$.
Or, on sait que $f_1(x) = -\ln(1-x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$.
Par inégalité, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} f_\alpha(x) = +\infty.}$$

Q27. On sait par le cours que :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n}.$$

Q28. On s'intéresse à la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \neq 0$ et :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1/n+1}{1/n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Par le critère de d'Alembert, on en déduit que :

$$\boxed{R = \frac{1}{1} = 1.}$$

Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x)$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]-1,1[,\ \exp(S(x)) = 1+x.}$$

Q29. Si $z_0 = 0$ alors $r = R\left(\sum_{n\geqslant 1} 0t^n\right) = +\infty$ (série entière nulle, convergence pour tout réel t).
Si $z_0 \neq 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = (-1)^{n-1}\frac{z_0^n}{n} \neq 0$ et :

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{|z_0|^{n+1}/n+1}{|z_0|^n/n} = |z_0| \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} |z_0|.$$

Par le critère de d'Alembert, on en déduit que $r = \frac{1}{|z_0|}$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{si } z_0 = 0 \text{ alors } r = +\infty \text{ et si } z_0 \neq 0 \text{ alors } r = \frac{1}{|z_0|}.}$$

Q30. Comme $|z_0| < 1$, on a toujours $r > 1$.
Or, en tant que somme de série entière, g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence et les dérivées s'y obtiennent par dérivation terme à terme.
Comme $[0,1] \subset]-r,r[$, on en déduit que :

$$\boxed{g \text{ est définie et de classe } \mathscr{C}^{+\infty} \text{ sur } [0,1].}$$

On a de plus pour tout $t \in [0,1]$:

$$g'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{z_0^n}{n} n t^{n-1} = z_0 \sum_{n=1}^{+\infty} (-tz_0)^{n-1} = z_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (-tz_0)^n.$$

On reconnaît une somme géométrique (avec $|-tz_0| \leqslant |z_0| < 1$) donc :

$$\boxed{\text{pour tout } t \in [0,1],\ g'(t) = \frac{z_0}{1+tz_0}.}$$

Q31. Comme g est dérivable sur $[0,1]$ à valeurs complexes, on sait par le cours (PCSI) que h est dérivable sur $[0,1]$ et on a :

$$\boxed{\text{pour tout } t \in [0,1],\ h'(t) = g'(t)\exp(g(t)) = \frac{z_0}{1+tz_0} h(t).}$$

Q32. La fonction $\varphi : t \mapsto 1 + tz_0$ est dérivable sur $[0,1]$ et a pour dérivée $t \mapsto z_0$.
Pour tout $t \in [0,1]$, $\frac{z_0}{1+tz_0}\varphi(t) = \frac{z_0}{1+tz_0}(1+tz_0) = z_0 = \varphi'(t)$.
Donc :

$$\boxed{\text{la fonction } t \mapsto 1+tz_0 \text{ est bien une solution de l'équation différentielle } y'(t) = \frac{z_0}{1+tz_0} y(t) \text{ sur } [0,1].}$$

On a de plus $\varphi(0) = 1$ et $h(0) = \exp(g(0)) = \exp(0) = 1$.
Ainsi, φ et g sont deux solutions du problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) - \frac{z_0}{1+tz_0} y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ sur $[0,1]$ (on a

bien $t \mapsto \dfrac{z_0}{1+tz_0} \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{C}))$.
Or, un problème de Cauchy admet une unique solution donc on en déduit que pour tout $t \in [0,1]$, $h(t) = \varphi(t)$.
En particulier, $h(1) = \varphi(1)$ ce qui donne :

$$\boxed{\exp(S(z_0)) = 1 + z_0.}$$

Q33. Soit $x \in]0,1[$. La fonction $t \mapsto \dfrac{x^t}{t^\alpha} = e^{t\ln x - \alpha \ln t}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
⋆ On a $\dfrac{x^t}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha}$.
Pour tout $t \in]0,1]$, $\dfrac{1}{t^\alpha} \geqslant 0$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge (car $\alpha < 1$).
Par comparaison, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge.
⋆ On a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{2-\alpha}e^{(\ln x)t} = 0$ par croissances comparées car $\ln x < 0$ donc $\dfrac{x^t}{t^\alpha} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
Pour tout $t \in [1,+\infty[$, $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge (car $2 > 1$).
Par comparaison, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge.
Ainsi :

$$\boxed{\text{l'intégrale } I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$$

Q34. Soit $x \in]0,1[$. Posons le changement de variable $u = -t\ln x$ dans l'intégrale convergente $I(x)$. L'intégrale obtenue sera donc convergente et de même valeur que $I(x)$.
On a $\mathrm{d}u = -(\ln x)\mathrm{d}t$. Quand $t \to 0$, $u \to 0$ et quand $t \to +\infty$, $u \to +\infty$. On a aussi $t = \dfrac{u}{-\ln x}$.
Ainsi :

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^\alpha}(-\ln x)^\alpha \frac{1}{-\ln x}\mathrm{d}u = (-\ln x)^{\alpha-1}\int_0^{+\infty} u^{1-\alpha-1}e^{-u}\mathrm{d}u$$

d'où :

$$\boxed{I(x) = (-\ln x)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha).}$$

Q35. Soit $x \in]0,1[$. La fonction $t \mapsto x^t = e^{t\ln x}$ est décroissante (car $\ln x < 0$) et positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est décroissante (car $\alpha > 0$) et positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par produit, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } \psi : t \mapsto \frac{x^t}{t^\alpha} \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Q36. Soit $x \in]0,1[$. Par décroissance de la fonction ψ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_k^{k+1} \psi(t)\mathrm{d}t \leqslant \psi(k).$$

Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 2$. En sommant pour k allant de 1 à $N-1$ et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\int_1^N \psi(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{N-1} \psi(k).$$

Or, on sait que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \psi(k) = \sum_{k\geqslant 1} \frac{x^k}{k^\alpha}$ converge (puisque $x \in]-1,1[$) et a pour somme $f_\alpha(x)$.
On sait également que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \psi(t)\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge.
En faisant tendre N vers $+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on en déduit que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant f_\alpha(x).$$

De même, par décroissance de la fonction ψ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\psi(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} \psi(t)\mathrm{d}t.$$

Remarquons que cette inégalité est aussi vraie pour $k = 0$. Comme ψ est décroissante sur $]0,1]$, on a pour tout $t \in]0,1]$, $\psi(1) \leqslant \psi(t)$ et par croissance de l'intégrale (comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge), on obtient :

$$\psi(1) = \int_0^1 \psi(1)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \psi(t)\mathrm{d}t.$$

Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 2$. En sommant pour k allant de 0 à $N-1$ et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{N-1} \psi(k) = \sum_{k=1}^{N} \psi(k) \leqslant \int_0^N \psi(t)\mathrm{d}t.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ (série et intégrale convergentes), on obtient :

$$f_\alpha(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\mathrm{d}t.$$

Ainsi :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant f_\alpha(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\mathrm{d}t.}$$

Q37. Soit $x \in]0,1[$. On a pour tout $t \in]0,1[$, $0 \frac{x^t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha}$ car $x^t = e^{t\ln x} \leqslant e^0 = 1$.
Par croissance de l'intégrale (toutes les intégrales en jeu convergent par **Q33** et intégrale de Riemann), on en déduit que :

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t.}$$

Q38. D'après **Q36**, on a pour tout $x \in]0,1[$:

$$I(x) - \int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant f_\alpha(x) \leqslant I(x).$$

Par la question **Q34**, on sait que $\lim\limits_{x\to 1^-} I(x) = +\infty$.
En effet, $\lim\limits_{x\to 1^-} (-\ln x) = 0^+$ et $\alpha - 1 < 0$ donc $\lim\limits_{x\to 1^-} (-\ln x)^{\alpha-1} = +\infty$ et $\Gamma(1-\alpha) > 0$ (par stricte positivité de l'intégrale car la fonction $t \mapsto t^{-\alpha}e^{-t}$ est positive, non identiquement nulle, et continue sur $]0,+\infty[$).
De plus, par la question **Q37**, on sait que $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ est bornée sur $]0,1[$ donc $I(x) - \displaystyle\int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha}\mathrm{d}t \underset{x\to 1^-}{\sim} I(x)$.
Par encadrement, on en déduit que :

$$\boxed{f_\alpha(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} I(x) = (-\ln x)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha).}$$