DEVOIR SURVEILLÉ 4 – Sujet Centrale-Mines 10/01/24 Durée 4h

Ce sujet est composé de deux problèmes indépendants.

Problème 1

Ce problème est composé de deux parties.

Dans la partie I, on définit une suite $(\alpha_n)_n$ d'entiers naturels via le développement en série entière d'une fonction auxiliaire et on s'intéresse en particulier à la suite extraite $(\alpha_{2n+1})_n$ formée des termes de rang impair.

Dans la partie II, on détermine un équivalent, lorsque n tend vers l'infini, de α_{2n+1} en faisant appel à des outils analytiques et notamment la fonction zêta de Riemann.

La partie II fait appel, très ponctuellement, à des résultats de la partie I.

I. Introduction d'une fonction auxiliaire

Soit l'intervalle $I =]-\pi/2, \pi/2[$. On considère la fonction f définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x}.$$

On note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f et, par convention, $f^{(0)} = f$.

I.A - Dérivées successives

1. Exprimer les dérivées f', f'' et $f^{(3)}$ à l'aide des fonctions usuelles.

2. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.$$

   On explicitera les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3 et, pour tout entier naturel n, on exprimera P_{n+1} en fonction de P_n et P_n'.

3. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, le polynôme P_n est unitaire, de degré n et que ses coefficients sont des entiers naturels.

4. Montrer

$$\forall x \in I, \quad 2f'(x) = f(x)^2 + 1.$$

   Pour tout entier naturel n, on pose $\alpha_n = f^{(n)}(0) = P_n(0)$.

5. Montrer $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}.$$

I.B - Développement en série entière

On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\alpha_n}{n!}x^n$ et g sa somme.

6. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \pi/2[, \quad \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!}x^n \leqslant f(x).$$

7. En déduire la minoration $R \geqslant \pi/2$.

8. Montrer

$$\forall x \in I, \quad 2g'(x) = g(x)^2 + 1.$$

9. Montrer

$$\forall x \in I, \quad f(x) = g(x).$$

Considérer les fonctions $\arctan f$ *et* $\arctan g$.

10. En déduire que $R = \pi/2$.

I.C - Partie paire et partie impaire du développement en série entière

11. Justifier que toute fonction $h : I \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique sous la forme $h = p + i$ avec $p : I \to \mathbb{R}$ une fonction paire et $i : I \to \mathbb{R}$ une fonction impaire.

12. En déduire

$$\forall x \in I, \quad \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1} \text{ et } \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!}x^{2n}.$$

On note t la fonction définie sur I par $t(x) = \tan(x)$.

13. Pour tout entier naturel n, exprimer $t^{(n)}(0)$ en fonction des réels $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

14. Rappeler, sans justification, l'expression de t' en fonction de t.

15. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1}\alpha_{2n-2k+1}.$$

II. Équivalent de α_{2n+1}

II.A - La fonction zêta

Pour tout $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

16. Encadrer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ par deux intégrales puis en déduire $\lim_{s\to+\infty} \zeta(s) = 1$.

17. Déterminer $C(s)$ tel que

$$\forall s \in]1, +\infty[, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} = C(s)\zeta(s).$$

II.B - Une formule pour la fonction cosinus

Pour tout entier naturel n et tout réel x, on pose $I_n(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(2xt)(\cos t)^n \mathrm{d}t$.

18. Montrer

$$\forall n \in [\![2, +\infty[\![, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right) I_n(x) = \frac{n-1}{n} I_{n-2}(x) \text{ et } \left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right) \frac{I_n(x)}{I_n(0)} = \frac{I_{n-2}(x)}{I_{n-2}(0)}.$$

19. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\pi x) = \pi x \frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right).$$

20. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0, 1[, \quad \cos(\pi x) = \frac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)} \frac{I_{2n}(0)}{I_{2n}(x)} \prod_{p=1}^{n} \left(1 - \frac{4x^2}{(2p-1)^2}\right).$$

On admet que cela permet d'obtenir un autre développement de la fonction tangente (sujet d'origine tronqué) :

$$\forall x \in [0, 1/2[, \quad \pi \tan(\pi x) = \sum_{p=1}^{+\infty} 2(2^{2p} - 1)\zeta(2p) x^{2p-1}.$$

II.C - Un équivalent de α_{2n+1}

21. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{2n+1} = \frac{2(2^{2n+2} - 1)(2n+1)!}{\pi^{2n+2}} \zeta(2n+2).$$

22. En déduire un équivalent de α_{2n+1} lorsque n tend vers l'infini.

Problème 2

I. Fonction Gamma d'Euler

On pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction Γ a pour ensemble de définition $]0, +\infty[$.

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $I_n(x) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n \mathrm{d}u$.

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $I_{n+1}(x) = \dfrac{n+1}{x} I_n(x+1)$.

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

   On fixe $x \in]0, +\infty[$ pour les trois questions suivantes.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(t) = t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \text{ si } t \in]0, n[\text{ et } f_n(t) = 0 \text{ si } t \in [n, +\infty[.$$

   Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers $\varphi : t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in]0, +\infty[$, $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$.

6. En déduire que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

7. *Application :* Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$ converge et utiliser la question précédente pour montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

II. Identité de Karamata

On considère une suite réelle $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
On suppose que la série entière $\sum\limits_{k\geqslant 0} a_k x^k$ a un rayon de convergence égal à 1 et on note f sa somme.
On suppose que :

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\, f(x) = \sqrt{\pi}.$$

8. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, déterminer

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k}.$$

9. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, justifier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$$

et calculer sa valeur.
En déduire l'égalité :

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$$

10. Montrer que pour toute application polynomiale réelle Q, on a

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k Q(x^k) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} Q(e^{-t})}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t.$$

Soit h la fonction définie, pour tout $x \in [0,1]$, par :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, e^{-1}[\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in [e^{-1}, 1]. \end{cases}$$

11. Justifier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t})\, dt$$

et donner sa valeur.

12. Soit $x \in [0,1[$. Justifier la convergence de la série de terme général $a_k x^k h(x^k)$.

13. *On admet l'égalité (dite de Karamata) :*

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k h(x^k) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} h(e^{-t})}{\sqrt{t}}\, dt$$

En utilisant ce résultat pour $x = e^{-\frac{1}{n}}$, en déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}.$$