CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 4 (sujet 2)

PROBLÈME 1 : *CENTRALE PC 2019*

I. Introduction d'une fonction auxiliaire

I.A - Dérivées successives

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur I, et on a pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(\cos x)^2 + \sin(x)(\sin(x)+1)}{(\cos x)^2} = \frac{1+\sin x}{(\cos x)^2},\\
f''(x) &= \frac{(\cos x)^3 + 2\sin x\cos x(1+\sin x)}{(\cos x)^4} = \frac{(\cos x)^2 + 2\sin x + 2(\sin x)^2}{(\cos x)^3}\\
&= \frac{(\sin x)^2 + 2\sin x + 1}{(\cos x)^3}\\
\text{et}\quad f^{(3)}(x) &= \frac{(2\cos x\sin x + 2\cos x)(\cos x)^3 + 3\sin x(\cos x)^2((\sin x)^2 + 2\sin x + 1)}{(\cos x)^6}\\
&= \frac{2(\cos x)^2\sin x + 2(\cos x)^2 + 3(\sin x)^3 + 6(\sin x)^2 + 3\sin x}{(\cos x)^4}\\
&= \frac{(\sin x)^3 + 4(\sin x)^2 + 5\sin x + 2}{(\cos x)^4}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in I,\ f'(x) = \frac{1+\sin x}{(\cos x)^2},\ f''(x) = \frac{(\sin x)^2 + 2\sin x + 1}{(\cos x)^3} \text{ et } f^{(3)}(x) = \frac{(\sin x)^3 + 4(\sin x)^2 + 5\sin x + 2}{(\cos x)^4}.}$$

2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in I$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$.
Initialisation : Pour $n = 0$, $\boxed{\text{le polynôme } P_0 = X + 1 \text{ convient.}}$
Notons au passage que d'après la question précédente,

$$\boxed{\text{les polynômes } P_1 = X+1,\ P_2 = X^2 + 2X + 1 \text{ et } P_3 = X^3 + 4X^2 + 5X + 2 \text{ conviennent.}}$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$..
Supposons qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in I$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$.
On a alors pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x)\\
&= \frac{\cos x P_n'(\sin x)(\cos x)^{n+1} + (n+1)\sin x(\cos x)^n P_n(\sin x)}{(\cos x)^{2n+2}}\\
&= \frac{(\cos x)^2 P_n'(\sin x) + (n+1)\sin x P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}\\
&= \frac{(1-(\sin x)^2)P_n'(\sin x) + (n+1)\sin x P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}} = \frac{P_{n+1}(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}
\end{aligned}$$

en posant $P_{n+1}(X) = (1-X^2)P_n'(X) + (n+1)XP_n(X) \in \mathbb{R}[X]$ (car $P_n \in \mathbb{R}[X]$).
Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ il existe un polynôme } P_n \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } \forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.}$$

De plus, cette suite vérifie :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(X) = (1 - X^2)P_n'(X) + (n+1)XP_n(X).}$$

3. • *Montrons d'abord l'unicité de la suite (P_n). L'article défini « le » de l'énoncé semble indiquer qu'elle est demandée...*
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On suppose qu"il existe deux polynômes P_n et Q_n vérifiant $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}} = \dfrac{Q_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$.
   Alors pour tout $x \in I$, $(P_n - Q_n)(\sin x) = 0$.
   Comme $\sin(I) =]-1, 1[$, on a pour tout $t \in]-1, 1[$, $(P_n - Q_n)(t) = 0$.
   Ainsi, le polynôme $P_n - Q_n$ a une infinité de racines donc c'est le polynôme nul d'où $P_n = Q_n$.
   Il y a donc bien unicité de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   • Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est unitaire, de degré n et ses coefficients sont des entiers naturels.
   Initialisation : Les polynômes $P_1 = X + 1$ et $P_2 = X^2 + 2X + 1$ sont bien unitaires à coefficients dans $\mathbb{N}$, $\deg(P_1) = 1$ et $\deg(P_2) = 2$.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On suppose que le polynôme P_n est unitaire, de degré n et ses coefficients sont des entiers naturels.
   Alors il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{N}^n$ tel que $P_n = X^n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.
   On a alors :

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= (1 - X^2)P_n'(X) + (n+1)XP_n(X)\\
&= (1 - X^2)\left(nX^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} ka_kX^{k-1}\right) + (n+1)X\left(X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_kX^k\right)\\
&= nX^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} ka_kX^{k-1} - nX^{n+1} - \sum_{k=1}^{n-1} ka_kX^{k+1} + (n+1)X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1}(n+1)a_kX^{k+1}\\
&= X^{n+1} + \underbrace{n}_{\in\mathbb{N}}X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}\underbrace{(k+1)a_{k+1}}_{\in\mathbb{N}}X^k + \underbrace{(n+1)a_0}_{\in\mathbb{N}}X + \sum_{k=2}^{n}\underbrace{(n+2-k)a_{k-1}}_{\in\mathbb{N}}X^k.
\end{aligned}$$

   On en déduit que P_{n+1} est un polynôme unitaire, de degré $n + 1$ et tous ses cœfficients sont des entiers naturels (car c'est une somme de polynômes à cœfficients dans $\mathbb{N}$).
   Conclusion :
   $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ le polynôme } P_n \text{ est unitaire, de degré } n \text{ et ses coefficients sont des entiers naturels.}}$
4. On a pour tout $x \in I$:

$$f(x)^2 + 1 = \frac{(\sin x + 1)^2}{(\cos x)^2} + 1 = \frac{(\sin x)^2 + 2\sin x + 1 + (\cos x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{2 + 2\sin x}{(\cos x)^2} = 2f'(x).$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in I,\ 2f'(x) = f(x)^2 + 1.}$$

5. • En appliquant la relation obtenue dans la question précédente en $x = 0$, on obtient

$$2f'(0) = (f(0))^2 + 1 \text{ c'est-à-dire } \boxed{2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1.}$$

   • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En dérivant n fois la relation obtenue à la question précédente, on obtient par la formule de Leibniz :

$$\forall x \in I, \quad 2f^{(n+1)}(x) = (f \times f)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x)f^{(n-k)}(x).$$

En appliquant en $x=0$, on obtient la relation souhaitée.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}.}$$

I.B - Développement en série entière

6. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I donc pour tout $N \in \mathbb{N}$, en lui appliquant la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et $x \in [0, \pi/2[$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)dt \\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!} x^n + \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} \frac{P_{N+1}(\sin t)}{(\cos t)^{N+2}} dt. \end{aligned}$$

Or, comme $x \in [0, \pi/2[$, on a pour tout $t \in [0, x]$, $\dfrac{(x-t)^N}{N!} \geqslant 0$, $(\cos t)^{N+2} \geqslant 0$ et comme P_{N+1} est à coefficients positifs et $\sin t \geqslant 0$, $P_{N+1}(\sin t) \geqslant 0$.
Par positivité de l'intégrale ($0 \leqslant x$), on en déduit :

$$f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!} x^n = \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} \frac{P_{N+1}(\sin t)}{(\cos t)^{N+2}} dt \geqslant 0.$$

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0, \pi/2[,\ \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!} x^n \leqslant f(x).}$$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $\alpha_n = P_n(0)$, c'est le cœfficient constant de P_n donc c'est un entier naturel (c'est vrai aussi pour $n=0$). Pour tout $x \in [0, \pi/2[$ la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ est donc à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée par $f(x)$ d'après la question précédente donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ converge.

   On en déduit que pour tout $x \in [0, \pi/2[$, $x \leqslant R$. En faisant tendre x vers $\pi/2$, on obtient $\boxed{R \geqslant \pi/2.}$

8. Par produit de Cauchy de la série entière $\displaystyle\sum \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ avec elle-même, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < R$ et donc en particulier pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} (g(x))^2 + 1 &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!} x^n \right)^2 + 1 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k!} \frac{\alpha_{n-k}}{(n-k)!} \right) x^n + 1 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \alpha_k \alpha_{n-k} \right) x^n + 1 \\ &= \alpha_0^2 + 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k} \right) x^n \\ &= 2\alpha_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha_{n+1}}{n!} x^n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{\alpha_{n+1}}{(n+1)!} x^n \\ &= 2g'(x) \end{aligned}$$

par dérivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence.

$$\boxed{\forall x \in I,\ 2g'(x) = g(x)^2 + 1.}$$

9. Soit $\varphi = \arctan(f)$ et $\psi = \arctan(g)$.
Les fonctions φ et ψ sont dérivables sur l'intervalle I et on a pour tout $x \in I$:

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)}{(f(x))^2 + 1} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \psi'(x) = \frac{g'(x)}{(g(x))^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

d'après les relations établies aux questions 4 et 8.
On en déduit qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $f(x) = g(x) + K$.
De plus, $\psi(0) = \arctan(g(0)) = \arctan(\alpha_0) = \arctan(f(0)) = \varphi(0)$ d'où $K = 0$.
Par suite, pour tout $x \in I$, $f(x) = \tan(\varphi(x)) = \tan(\psi(x)) = g(x)$.

$$\boxed{\forall x \in I,\ f(x) = g(x).}$$

10. Raisonnons par l'absurde en supposant $R > \pi/2$. Alors la fonction g, continue sur $]-R, R[$, serait continue en $\pi/2$.

Or $\lim\limits_{x \to \pi/2^-} g(x) = \lim\limits_{x \to \pi/2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi/2^-} \dfrac{\overbrace{\sin x + 1}^{\to 2}}{\underbrace{\cos x}_{\to 0^+}} = +\infty$ donc g n'est pas continue en $\pi/2$, ce qui est absurde.
On a donc bien $\boxed{R = \pi/2.}$

I.C - Partie paire et partie impaire du développement en série entière

11. Raisonnons par analyse-synthèse. Soit $h : I \to \mathbb{R}$.
Analyse : S'il existe p paire et i impaire telle que $h = p + i$ sur I alors pour tout $x \in I$, on a :

$$h(x) = p(x) + i(x) \quad \text{et} \quad h(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x),$$

donc $p(x) = \dfrac{h(x) + h(-x)}{2}$ et $i(x) = \dfrac{h(x) - h(-x)}{2}$.
Synthèse : Réciproquement, soit $p : x \in I \mapsto \dfrac{h(x) + h(-x)}{2}$ et $i : x \in I \mapsto \dfrac{h(x) - h(-x)}{2}$. Alors :
— pour tout $x \in I$, $-x \in I$ et $p(-x) = \dfrac{h(-x) + h(-(-x))}{2} = \dfrac{h(x) + h(-x)}{2} = p(x)$ donc p est paire
— pour tout $x \in I$, $-x \in I$ et $i(-x) = \dfrac{h(-x) - h(-(-x))}{2} = -\dfrac{h(x) - h(-x)}{2} = -i(x)$ donc i est impaire
— pour tout $x \in I$, $p(x) + i(x) = \dfrac{h(x) + h(-x)}{2} + \dfrac{h(x) - h(-x)}{2} = h(x)$ donc $h = p + i$.
Conclusion :
$\boxed{\text{Toute fonction } h : I \to \mathbb{R} \text{ s'écrit de façon unique sous la forme } h = p + i \text{ avec } p \text{ paire et } i \text{ impaire.}}$

12. Pour tout $x \in I$, on a :

$$f(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x},$$

et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$ est paire, la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$ est impaire.
Par ailleurs, pour tout $x \in I$, comme les séries qui apparaissent ci-dessous convergent (les suites $\left(\dfrac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers 0 en tant que suites extraites donc les rayons de convergence des séries entières $\sum \dfrac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$ et $\sum \dfrac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ sont supérieurs ou égaux à $\pi/2$), on a aussi :

$$f(x) = g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

et la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$ est paire, la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ est impaire.
D'où par l'unicité de la décomposition prouvée à la question précédente, on a :

$$\boxed{\forall x \in I, \quad \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}.}$$

13. D'après la question précédente, tan est développable en série entière sur I et elle coïncide donc avec sa série de Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!} x^n$ sur I.
Par unicité du développement en série entière, on en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \tan^{(2n)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \tan^{(2n+1)}(0) = \alpha_{2n+1}.}$$

14. Pour tout $x \in I$, $\tan'(x) = 1 + (\tan x)^2$ donc $\boxed{t' = 1 + t^2.}$

15. Pour tout $x \in I$, $t'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n)!} x^{2n}$.
Par produit de Cauchy, on a aussi pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} t'(x) = (t(x))^2 + 1 &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!} x^n \right)^2 + 1 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} \frac{\tan^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} \right) x^n + 1. \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière de t' sur I, on en déduit que $\alpha_1 = 0 + 1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n)!} &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} \frac{\tan^{(2n-k)}(0)}{(2n-k)!} \\ &= \frac{1}{(2n)!} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \tan^{(k)}(0) \tan^{(2n-k)}(0) \\ &= \frac{1}{(2n)!} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \binom{2n}{k} \underbrace{\tan^{(k)}(0)}_{=0} \tan^{(2n-k)}(0) + \frac{1}{(2n)!} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \binom{2n}{k} \tan^{(k)}(0) \tan^{(2n-k)}(0) \\ &= \frac{1}{(2n)!} \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \tan^{(2k-1)}(0) \tan^{(2n-(2k-1))}(0) \\ &= \frac{1}{(2n)!} \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1} \alpha_{2n-2k+1} \quad \text{(d'après 13 avec } 2k-1 \text{ et } 2n-2k+1 \text{ impairs).} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1} \alpha_{2n-2k+1}.}$$

II. Equivalent de α_{2n+1}

II.A - La fonction zêta

16. Soit $s > 1$.
   - Posons $g : t \mapsto \frac{1}{t^s} = \exp(-s \ln(t))$. La fonction g est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$.

• Par suite, pour tout $n \geqslant 2$, pour tout $t \in [n, n+1]$, $g(t) \leqslant g(n)$ d'où par positivité de l'intégrale $(n \leqslant n+1)$, on a :

$$\int_n^{n+1} g(t)dt \leqslant \int_n^{n+1} g(n)dt = g(n).$$

Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geqslant 2$. En sommant ces inégalités pour n allant de 2 à p et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\int_2^{p+1} g(t)dt = \sum_{n=2}^{p} \int_n^{n+1} g(t)dt \leqslant \sum_{n=2}^{p} g(n).$$

• De même, pour tout $n \geqslant 2$, pour tout $t \in [n-1, n]$, $g(t) \geqslant g(n)$ d'où par positivité de l'intégrale $(n-1 \leqslant n)$, on a :

$$\int_{n-1}^{n} g(t)dt \geqslant \int_{n-1}^{n} g(n)dt = g(n).$$

En sommant ces inégalités pour tout n allant 2 à p et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\int_1^{p} g(t)dt = \sum_{n=2}^{p} \int_{n-1}^{n} g(t)dt \geqslant \sum_{n=2}^{p} g(n).$$

On a donc obtenu :

$$\int_2^{p+1} \frac{1}{t^s}dt \leqslant \sum_{n=2}^{p} \frac{1}{n^s} \leqslant \int_1^{p} \frac{1}{t^s}dt.$$

Comme $s > 1$, la série et les intégrales de Riemann en $+\infty$ convergent et on obtient par passage à la limite $p \to +\infty$:

$$\boxed{\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^s}dt \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^s}dt.}$$

En calculant les intégrales, on obtient :

$$\left[\frac{1}{-s+1}t^{-s+1}\right]_2^{+\infty} \leqslant \zeta(s) - 1 \leqslant \left[\frac{1}{-s+1}t^{-s+1}\right]_1^{+\infty}$$

d'où en ajoutant 1 :

$$1 + \frac{1}{(s-1)2^{s-1}} \leqslant \zeta(s) \leqslant 1 + \frac{1}{s-1}.$$

Comme $\lim\limits_{s\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{(s-1)e^{(s-1)\ln 2}} = 1 = \lim\limits_{s\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{(s-1)}$, on en déduit par le théorème de limite par encadrement que :

$$\boxed{\lim_{s\to+\infty} \zeta(s) = 1.}$$

17. Pour tout $s \in]1, +\infty[$, on a (toutes les séries en jeu convergent) :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{j^s} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^s} = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s),$$

donc :

$$\boxed{C(s) = 1 - \frac{1}{2^s} \text{ convient.}}$$

II.B - Une formule pour la fonction cosinus

18. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}$.
• Posons pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $u(t) = 2x\sin(2xt)$ et $v(t) = (\cos t)^n$.
Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ et on a pour tout $t \in [0, \pi/2]$:

$$u'(t) = 4x^2\cos(2xt) \text{ et } v'(t) = -n\sin t(\cos t)^{n-1}.$$

Par intégration par parties, on a alors :

$$\begin{aligned}4x^2 I_n(x) &= \int_0^{\pi/2} u'(t)v(t)dt = [2x\sin(2xt)(\cos t)^n]_0^{\pi/2} + n\int_0^{\pi/2} 2x\sin(2xt)\sin t(\cos t)^{n-1}dt\\ &= n\int_0^{\pi/2} 2x\sin(2xt)\sin t(\cos t)^{n-1}dt.\end{aligned}$$

Posons à présent pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $u(t) = -\cos(2xt)$ et $v(t) = \sin t(\cos t)^{n-1}$.
Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ et on a pour tout $t \in [0, \pi/2]$:

$$u'(t) = 2x\sin(2xt) \text{ et } v'(t) = (\cos t)^n - (n-1)(\sin t)^2(\cos t)^{n-2}.$$

Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}4x^2 I_n(x) &= n\int_0^{\pi/2} 2x\sin(2xt)\sin t(\cos t)^{n-1}dt\\ &= n\left[-\cos(2xt)\sin(t)(\cos t)^{n-1}\right]_0^{\pi/2} + n\int_0^{\pi/2}\cos(2xt)((\cos t)^n - (n-1)(\sin t)^2(\cos t)^{n-2})dt\\ &= \underbrace{0}_{\text{car } n\geqslant 2} + n\int_0^{\pi/2}\cos(2xt)(\cos t)^n dt - n(n-1)\int_0^{\pi/2}\cos(2xt)(1-(\cos t)^2)(\cos t)^{n-2}dt\\ &= nI_n(x) - n(n-1)\int_0^{\pi/2}\cos(2xt)(\cos t)^{n-2}dt + n(n-1)\int_0^{\pi/2}\cos(2xt)(\cos t)^n dt\\ &= nI_n(x) - n(n-1)I_{n-2}(x) + n(n-1)I_n(x) = n^2 I_n(x) - n(n-1)I_{n-2}(x),\end{aligned}$$

donc $(n^2 - 4x^2)I_n(x) = n(n-1)I_{n-2}(x)$ d'où en divisant par $n^2 \neq 0$:

$$\boxed{\left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right)I_n(x) = \frac{n-1}{n}I_{n-2}(x).}$$

• En particulier pour $x = 0$, on a $I_n(0) = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}(0)$.
De plus, comme la fonction $t \mapsto (\cos t)^n$ est continue, positive sur $[0, \pi/2]$ et n'est pas la fonction nulle ($\cos(0) = 1$), on a $I_n(0) = \displaystyle\int_0^{\pi/2}(\cos t)^n dt > 0$ donc on peut diviser par $I_n(0)$ et on obtient :

$$\left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right)\frac{I_n(x)}{I_n(0)} = \frac{\left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right)I_n(x)}{I_n(0)} = \frac{\frac{n-1}{n}I_{n-2}(x)}{\frac{n-1}{n}I_{n-2}(0)} = \frac{I_{n-2}(x)}{I_{n-2}(0)}.$$

$$\boxed{\left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right)\frac{I_n(x)}{I_n(0)} = \frac{I_{n-2}(x)}{I_{n-2}(0)}.}$$

19. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sin(\pi x) = \pi x\dfrac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$.
Initialisation : (pour $n = 1$)
On a :

$$\pi x\frac{I_2(x)}{I_2(0)}\prod_{k=1}^{1}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = \pi x\frac{I_2(x)}{I_2(0)}\left(1 - \frac{4x^2}{2^2}\right) = \pi x\frac{I_0(x)}{I_0(0)} \quad \text{(par la question précédente avec } n = 2\text{).}$$

Or, $I_0(0) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1 dt = \pi/2$

et $2xI_0(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 2x\cos(2xt)dt = [\sin(2xt)]_0^{\pi/2} = \sin(2x(\pi/2)) - \sin(2x\times 0) = \sin(\pi x)$.

Ainsi, $\pi x \dfrac{I_2(x)}{I_2(0)} \displaystyle\prod_{k=1}^{1}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{\sin(\pi x)}{\pi/2} = \sin(\pi x)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $\sin(\pi x) = \pi x \dfrac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)} \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$.

Alors :

$$\begin{aligned}
\pi x \frac{I_{2n+2}(x)}{I_{2n+2}(0)} \prod_{k=1}^{n+1}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right) &= \pi x \frac{I_{2n+2}(x)}{I_{2n+2}(0)}\left(1-\frac{x^2}{(n+1)^2}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)\\
&= \pi x \frac{I_{2n+2}(x)}{I_{2n+2}(0)}\left(1-\frac{4x^2}{(2n+2)^2}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)\\
&= \pi x \frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right) \quad \text{(par la question précédente en remplaçant } n \text{ par } 2n+2 \geqslant 2)\\
&= \sin(\pi x) \quad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence).}
\end{aligned}$$

Conclusion : On en déduit que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sin(\pi x) = \pi x \frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right).}$$

20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in]0,1[$. On a $\pi x \in]0,\pi[$ donc $\sin(\pi x) \neq 0$. On a donc en appliquant la question précédente avec x et n puis $2x$ et $2n$:

$$\begin{aligned}
\cos(\pi x) &= \frac{1}{2}\frac{\sin(2\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{2}\frac{\sin(\pi(2x))}{\sin(\pi x)}\\
&= \frac{1}{2}\frac{\pi(2x)\frac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)}\prod_{k=1}^{2n}\left(1-\frac{(2x)^2}{k^2}\right)}{\pi x\frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)}\\
&= \frac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)}\frac{I_{2n}(0)}{I_{2n}(x)}\frac{\prod_{k=1}^{2n}\left(1-\frac{(2x)^2}{k^2}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)}\\
&= \frac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)}\frac{I_{2n}(0)}{I_{2n}(x)}\frac{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{(2x)^2}{(2k)^2}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{(2x)^2}{(2k-1)^2}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)}\\
&= \frac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)}\frac{I_{2n}(0)}{I_{2n}(x)}\frac{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{(2x)^2}{(2k-1)^2}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)}\\
&= \frac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)}\frac{I_{2n}(0)}{I_{2n}(x)}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{(2x)^2}{(2k-1)^2}\right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]0,1[,\ \cos(\pi x) = \frac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)}\frac{I_{2n}(0)}{I_{2n}(x)}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{4x^2}{(2k-1)^2}\right).}$$

Notons que la formule est encore valable pour $x=0$ (on le vérifie aisément en prenant $x=0$).

II.C - Un équivalent de α_{2n+1}

21. D'après la question 12, pour tout $x \in [0, 1/2[$, comme $\pi x \in [0, \pi/2[\subset I$, on a
$$\pi \tan(\pi x) = \pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!}(\pi x)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!}\pi^{2n+2}x^{2n+1}.$$
Par ailleurs, d'après le développement admis, on a pour tout $x \in [0, 1/2[$ en posant $n = p - 1$,
$$\pi \tan(\pi x) = \sum_{p=1}^{+\infty} 2(2^{2p} - 1)\zeta(2p)x^{2p-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(2^{2n+2} - 1)\zeta(2n+2)x^{2n+1}.$$
Ces deux égalités restent valables sur $]-1/2, 0]$ par imparité de toutes les fonctions apparaissant ici.
Par unicité du développement en série entière de $x \mapsto \pi \tan(\pi x)$ sur $]-1/2, 1/2[$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!}\pi^{2n+2} = 2(2^{2n+2} - 1)\zeta(2n+2)$$
d'où :
$$\boxed{\alpha_{2n+1} = \frac{2(2^{2n+2} - 1)(2n+1)!}{\pi^{2n+2}}\zeta(2n+2).}$$

22. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \zeta(2n+2) = 1$ (d'après Q16 puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+2) = +\infty$), on a $\zeta(2n+2) \sim 1$ et par suite :
$$\boxed{\alpha_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2(2^{2n+2})(2n+1)!}{\pi^{2n+2}} = \frac{2^{2n+3}(2n+1)!}{\pi^{2n+2}}.}$$
On peut éventuellement aller plus loin en utilisant Stirling, mais quel intérêt ici ?!

Problème 2 : *inspiré Mines PC 2016*

I. Fonction Gamma d'Euler

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)\ln t}e^{-t}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est donc généralisée en 0 et en $+\infty$.
Étude en 0 *:* On a $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to0^+}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$.
Pour tout $t \in]0, 1]$, on a $\dfrac{1}{t^{1-x}} \geqslant 0$.
Ainsi, par comparaison par équivalent, les intégrales $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
On sait que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $1 - x < 1$ c'est-à-dire $x > 0$.
Étude en $+\infty$ *:* On a $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0$ par croissances comparées donc $t^{x-1}e^{-t} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
Pour tout $t \in [1, +\infty[$, $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$.
L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge car $2 > 1$.
Ainsi, par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.
On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$.
Ainsi :
$$\boxed{\text{la fonction } \Gamma \text{ a pour domaine de définition }]0, +\infty[.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in]0, +\infty[$.
Notons que la fonction $u \mapsto u^{x-1}(1-u)^n$ est continue sur $]0, 1]$ et $u^{x-1}(1-u)^n \underset{u \to 0^+}{\sim} u^{x-1}$ donc on montre comme à la question précédente que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n \mathrm{d}u$ converge puisque $x > 0$.
Utilisons une intégration par parties.
Les fonctions $u \mapsto \dfrac{1}{x}u^x$ et $u \mapsto (1-u)^{n+1}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, 1]$, de dérivées respectives $u \mapsto u^{x-1}$ et $u \mapsto -(n+1)(1-u)^n$.
On a de plus $\displaystyle\lim_{u \to 0} \frac{1}{x}u^x(1-u)^{n+1} = 0 \in \mathbb{R}$ (car $x > 0$) et les intégrales convergent donc par intégration par parties, on obtient :

$$\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{n+1}\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{x}u^x(1-u)^{n+1}\right]_0^1 + \frac{n+1}{x}\int_0^1 u^x(1-u)^n \mathrm{d}u$$

d'où :

$$\boxed{I_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} I_n(x+1).}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in]0, +\infty[$.
Par le changement de variable affine $u = \dfrac{t}{n}$ dans l'intégrale convergente $\displaystyle\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n \mathrm{d}u$, on obtient :

$$\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n \mathrm{d}u = \int_0^n \frac{1}{n^{x-1}} t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{1}{n}\mathrm{d}t$$

donc $\displaystyle\int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = n^x I_n(x)$ (le changement de variable prouvant également la convergence de cette intégrale).
Montrons alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathscr{P}(n) : \forall x \in]0, +\infty[,\ I_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Initialisation : Pour $n = 1$, pour $x > 0$, on a :

$$I_1(x) = \int_0^1 (u^{x-1} - u^x)\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{x}u^x - \frac{1}{x+1}u^{x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1!}{x(x+1)}$$

donc $\mathscr{P}(1)$ est vérifiée.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vérifiée.
Soit $x \in]0, +\infty[$.
On a par la question précédente $I_{n+1}(x) = \dfrac{n+1}{x} I_n(x+1)$.
Par hypothèse de récurrence appliquée avec $x + 1 > 0$, on a :

$$I_n(x+1) = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}$$

donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.
On en déduit que :

$$I_{n+1}(x) = \frac{(n+1)!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}.$$

On a donc prouvé que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$I_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

d'où :

$$\boxed{\int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = n^x I_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.}$$

4. Soit $t \in]0,+\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > t$ (donc à partir d'un certain rang), on a :

$$f_n(t) = t^{x-1}\exp\left(n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right) = t^{x-1}\exp\left(n\left(-\frac{t}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = t^{x-1}\exp\left(-t+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)$$

puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{t}{n} = 0$.
Par continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = t^{x-1}e^{-t} = \varphi(t)$.
On a ainsi prouvé que :

$$\boxed{\text{la suite } (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge simplement sur }]0,+\infty[\text{ vers } \varphi : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}.}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in]0,+\infty[$.
Si $t \geqslant n$ alors $|f_n(t)| = 0 \leqslant \varphi(t)$.
Si $t < n$ alors $|f_n(t)| = t^{x-1}\exp\left(n\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right)\right)$ et comme pour tout $a \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+a) \leqslant a$ (par concavité), on a $\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right) \leqslant -\dfrac{t}{n}$ donc par produit par $n \geqslant 0$ puis croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$\exp\left(n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right) \leqslant \exp(-t) \text{ d'où } |f_n(t)| \leqslant t^{x-1}e^{-t} = \varphi(t).$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } t \in]0,+\infty[,\ |f_n(t)| \leqslant \varphi(t).}$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions f_n et φ sont continues par morceaux sur $]0,+\infty[$.
De plus, comme $x > 0$, d'après Q1 l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t$ converge (absolumentl) donc la fonction φ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
On a ainsi vérifié aux questions 4 et 5 les deux hypothèses du théorème de convergence dominée donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t = \Gamma(x).$$

Par définition des fonctions f_n, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$

On en déduit par Q3 que :

$$\boxed{\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.}$$

7. *Application :* L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{1/2-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ converge car $\dfrac{1}{2} > 0$ et elle vaut $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
Déterminons la valeur de $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ en utilisant la question 6.
On a :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}n!}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\cdots(\frac{1}{2}+n)}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\cdots(\frac{1}{2}+n) = \frac{1\times 3\times ...\times(2n+1)}{2^{n+1}} = \frac{1\times 2\times 3\times ...\times 2n\times(2n+1)}{2\times 4\times ...\times 2n\times 2^{n+1}} = \frac{(2n+1)!}{2^n n! 2^{n+1}}.$$

On en déduit que :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{2^{2n+1}\sqrt{n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Par la formule de Stirling, on a $n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$ donc $\sqrt{n}(n!)^2 \sim 2\pi n\sqrt{n}n^{2n}e^{-2n}$ et (suite extraite) :

$$(2n+1)! \sim \sqrt{2\pi(2n+1)}(2n+1)^{2n+1}e^{-2n-1} \sim 2\sqrt{\pi n}(2n+1)^{2n}2ne^{-2n-1}.$$

On a donc :

$$\frac{2^{2n+1}\sqrt{n}(n!)^2}{(2n+1)!} \sim \sqrt{\pi}e\frac{(2n)^{2n}}{(2n+1)^{2n}} = \sqrt{\pi}ee^{-2n\ln(1+\frac{1}{2n})} = \sqrt{\pi}ee^{-2n(\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{2n}))} = \sqrt{\pi}ee^{-1+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\pi}.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.}$$

II. Identité de Karamata

8. On remarque que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-1,1[$, on a $x^{p+1} \in]-1,1[$ donc la série $\sum_{k\geqslant 0} a_k x^{(p+1)k}$ converge et on a :

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} &= \sqrt{1-x}f(x^{p+1}) \\
&= \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^{p+1}}}\sqrt{1-x^{p+1}}f(x^{p+1}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x+\cdots+x^p}}\sqrt{1-x^{p+1}}f(x^{p+1})
\end{aligned}$$

puisque $a^{p+1}-b^{p+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{p} a^k b^{p-k}$.

Comme $\lim_{x\to 1^-} x^{p+1} = 1^-$, on en déduit par composition que :

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} = \sqrt{\frac{\pi}{p+1}}}$$

9. Soit $p \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Par le changement de variable affine $u = (p+1)t$, on obtient que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{p+1}}\frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{(p+1)t}}\ (p+1)\mathrm{d}t$$

est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{p+1}}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\ du$ et de même valeur en cas de convergence.

Par la question 7 et par linéarité, on en déduit que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\ dt \text{ converge et } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\ dt = \sqrt{\frac{\pi}{p+1}}.}$$

Avec la question précédente, on a donc immédiatement

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\ dt.}$$

10. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Il existe un entier d et des scalaires $c_0, \dots, c_d$ tels que $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{d} c_i X^i$. La question précédente donne

$$\forall i \in [\![0, d]\!],\ \lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x^k)^i x^k = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}(e^{-t})^i}{\sqrt{t}}\ dt$$

Par linéarité du passage à la limite, du passage à la somme infinie et du passage à l'intégrale (pas de souci pour intervertir les symboles car on effectue une somme FINIE), on obtient que :

$$\boxed{\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k Q(x^k) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} Q(e^{-t})}{\sqrt{t}}\ dt.}$$

11. La fonction $g\ :\ t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t})$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^{+*}$ (il y a un unique problème de continuité en 1 où la fonction a des limites à gauche et à droite finies) et on a des problèmes d'intégrabilité en 0 et $+\infty$.
La fonction h étant majorée en module par e, pour tout $t \in]0, +\infty[$, on a $0 \leqslant |g(t)| \leqslant e \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ converge. Donc $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t})\ dt \text{ converge.}}$
Par définition de h, on a par Chasles :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t})\ dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_0^1 = 2.$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t})\ dt = 2.}$$

12. Pour $x \in [0, 1[$ fixé, on a x^k qui tend vers 0 quand $k \to +\infty$.
On en déduit qu'à partir d'un certain rang, $x^k \in [0, e^{-1}[$ donc la suite $(a_k x^k h(x^k))$ est nulle à partir d'un certain rang. La série associé est donc convergente (les sommes partielles stationnent à partir d'un certain rang).

$$\boxed{\text{La série de terme général } a_k x^k h(x^k) \text{ converge.}}$$

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de h, on a :

$$\sqrt{1 - e^{-1/n}} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{-k/n} h(e^{-k/n}) = \sqrt{1 - e^{-1/n}} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Quand $n \to +\infty$, $e^{-1/n} \to 1^-$ et l'égalité de Karamata donne :

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{1 - e^{-1/n}} \sum_{k=0}^{n} a_k = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t})\ dt = 2$$

Comme $1 - e^{-x} \sim_0 x$, on en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sim \frac{2}{\sqrt{1 - e^{-1/n}}} \sim 2\sqrt{n}.$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k \sim 2\sqrt{n}.}$$