PRÉAMBULE AUX PROBABILITÉS : ENSEMBLES DÉNOMBRABLES ET FAMILLES SOMMABLES

Cours

On présente dans ce chapitre quelques outils utiles en probabilité.
Les résultats seront admis et ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation.
Leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste.

I. Ensembles dénombrables

Définition 1

- Un ensemble A est dit *fini* lorsque $A = \varnothing$ ou il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et une bijection de A dans $[\![1, N]\!]$. Dans ce cas, N est unique et est appelé *le cardinal de* A.
- Un ensemble A est dit *dénombrable* lorsqu'il existe une bijection de A dans $\mathbb{N}$.
- Un ensemble est dit *au plus dénombrable* lorsqu'il est fini ou dénombrable.

– Soit A un ensemble fini de cardinal $N \in \mathbb{N}^*$. Soit φ une bijection $[\![1, N]\!]$ dans A.
Si pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, on pose $x_n = \varphi(n)$ alors A peut être décrit *en extension* sous la forme :

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} = \{x_n, n \in [\![1, N]\!]\}.$$

– Soit A un ensemble dénombrable. Soit φ une bijection de $\mathbb{N}$ dans A.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = \varphi(n)$ alors A peut être décrit en extension sous la forme :

$$A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Un ensemble au plus dénombrable est un ensemble pouvant s'écrire sous la forme :

$$A = \{x_i, i \in I\} \text{ où } I \subset \mathbb{N} \text{ avec des } x_i \text{ distincts.}$$

En d'autres termes, c'est un ensemble dont on peut numéroter les éléments.

Exemples : L'ensemble des entiers positifs pairs est dénombrable car il s'écrit en extension $\{2n,\ n \in \mathbb{N}\}$.
De même, l'ensemble des entiers positifs impairs est dénombrable car il s'écrit $\{2n + 1,\ n \in \mathbb{N}\}$.

On a le résultat plus général suivant :

Proposition 2

Toute partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable :

si A est un ensemble dénombrable et si $B \subset A$ alors B est au plus dénombrable.

Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est donc dénombrable, comme par exemple l'ensemble $\mathscr{P}$ des nombres premiers. On peut donc écrire $\mathscr{P} = \{p_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Proposition 3

Une union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable :

si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles dénombrables où $I \subset \mathbb{N}$ alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est dénombrable.

On rappelle la définition d'une union : $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I,\ x \in A_i\}$.

Exemple : Comme $\mathbb{N}$ et $-\mathbb{N} = \{-n,\ n \in \mathbb{N}\}$ sont dénombrables, $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$ est dénombrable.

Proposition 4

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Proposition 5

Le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable :

si $A_1, \ldots, A_n$ sont n ensembles dénombrables (où $n \in \mathbb{N}^*$) alors $\prod_{k=1}^{n} A_k$ est dénombrable.

On rappelle la définition du produit cartésien : $\prod_{k=1}^{n} A_k = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k \in A_k\}$.

Exemples :

- $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable,
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable ce qui permet de prouver que $\mathbb{Q}$ est dénombrable
  (car $\mathbb{Q}$ est en bijection avec $\{(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ p \wedge q = 1\}$ qui est inclus dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$).

Pour finir, voici quelques exemples d'ensembles infinis non dénombrables :

- l'ensemble $\mathbb{R}$,
- l'ensemble $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (ensemble des suites dont tous les termes valent 0 ou 1),
- l'ensemble $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ (ensemble des parties de $\mathbb{N}$).

II. Familles sommables

A. Familles d'éléments de $[0,+\infty]$

Soit I un ensemble au plus dénombrable. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$.
On souhaite définir la somme $\sum\limits_{i\in I} x_i$.

S'il existe $i\in I$ tel que $x_i=+\infty$ alors on pose $\sum\limits_{i\in I} x_i=+\infty$.

On suppose désormais que pour tout $i\in I$, x_i est un réel positif.

⋆ *Cas I fini :* Dans ce cas, $\sum\limits_{i\in I} x_i$ désigne sans surprise la somme de tous les termes de la famille.

⋆ *Cas I dénombrable :* Soit φ une bijection de $\mathbb{N}$ dans I. On considère la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_{\varphi(n)}$.

On admet que la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_{\varphi(n)}$, ainsi que sa somme en cas de convergence, ne dépendent pas de la bijection φ de $\mathbb{N}$ dans I choisie. En d'autres termes, cela signifie que l'ordre dans lequel on somme les éléments n'influe ni sur la nature de la série, ni sur sa somme en cas de convergence.

On pose alors $\sum\limits_{i\in I} x_i=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_{\varphi(n)}$ en cas de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_{\varphi(n)}$ et $\sum\limits_{i\in I} x_i=+\infty$ sinon.

Dans la pratique :

si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille au plus dénombrable d'éléments de $[0,+\infty]$ alors on admettra l'existence de sa somme que l'on pourra calculer ou majorer au moyen des résultats ci-dessous.

Proposition 6

Soit $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ deux familles au plus dénombrables d'éléments de $[0,+\infty]$.
Si pour tout $i\in I$, $x_i\leqslant y_i$ alors $\sum\limits_{i\in I} x_i\leqslant\sum\limits_{i\in I} y_i$.

Théorème 7 (*Découpage par paquets*)

Soit $(x_i)_{i\in I}$ est une famille au plus dénombrable d'éléments de $[0,+\infty]$.
Si $I=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ (union disjointe) alors $\sum\limits_{i\in I} x_i=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{i\in I_n} x_i\right)$.

Exemple : $\mathbb{Z}=\mathbb{N}^*\cup(-\mathbb{N})$, l'union étant disjointe.
Si $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille d'éléments de $[0,+\infty]$ alors :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n=\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n+\sum_{n\in(-\mathbb{N})} x_n=\sum_{n=1}^{+\infty} x_n+\sum_{n=0}^{+\infty} x_{-n}.$$

Corollaire 8 (*Théorème de Fubini*)

Soit $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille au plus dénombrable d'éléments de $[0,+\infty]$.
Alors :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j}=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{i,j}=\sum_{j\in J}\sum_{i\in I} x_{i,j}.$$

Proposition 9 (*Additivité*)

Soit $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ deux familles au plus dénombrables d'éléments de $[0,+\infty]$.
Soit $\lambda \in [0,+\infty]$. On a :

$$\sum_{i\in I}(x_i+\lambda y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \lambda \sum_{i\in I} y_i.$$

Par convention ici, $0\times(+\infty) = 0$.

Définition 10

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'éléments de $[0,+\infty]$.
La famille $(x_i)_{i\in I}$ est dite *sommable* lorsque $\sum_{i\in I} x_i < +\infty$.

Exemple 1 : On pose pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, $x_{i,j} = \dfrac{i^j}{i!j!}$.
Calculer la somme $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x_{i,j}$. La famille $(x_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ?

Exemple 2 : On pose pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, $a_{m,n} = \dfrac{1}{(m+n)^3}$ et $b_{m,n} = \dfrac{1}{(m+n)^2}$.
Étudier la sommabilité des familles $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ et $(b_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$.

B. Familles d'éléments réels ou complexes

Définition 11

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable de nombres réels ou complexes.
La famille $(x_i)_{i\in I}$ est dite *sommable* lorsque la famille $(|x_i|)_{i\in I}$ est sommable c'est-à-dire lorsque $\sum_{i\in I}|x_i| < +\infty$.

Cas particulier $I=\mathbb{N}$: Par définition, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty}|x_n| < +\infty$ c'est-à-dire lorsque la série $\sum x_n$ converge absolument.

Proposition 12

Soit $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ deux familles au plus dénombrables de nombres réels ou complexes.
Si pour tout $i\in I$, $|x_i|\leqslant y_i$ et la famille $(y_i)_{i\in I}$ est sommable alors la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable.

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable d'éléments de $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Une fois la sommabilité prouvée, on admet que l'on peut définir la somme $\sum_{i\in I} x_i$ (élément de $\mathbb{K}$) que l'on peut calculer au moyen des résultats suivants.

Proposition 13 (*Croissance*)

Soit $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ deux familles au plus dénombrables d'éléments de $\mathbb{R}$.
On suppose que les familles $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont sommables.

Si pour tout $i \in I$, $x_i \leqslant y_i$ alors $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i \leqslant \sum_{i\in I} y_i$.

Proposition 14 (*Linéarité*)

Soit $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ deux familles au plus dénombrables d'éléments de $\mathbb{K}$.
On suppose que les familles $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont sommables.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors la famille $(x_i + \lambda y_i)_{i\in I}$ est sommable et on a :

$$\sum_{i\in I}(x_i + \lambda y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \lambda \sum_{i\in I} y_i.$$

Théorème 15 (*Sommation par paquets*)

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrables d'éléments de $\mathbb{K}$.
On suppose que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable.

Si $I = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ (union disjointe) alors $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} x_i\right)$.

Corollaire 16 (*Théorème de Fubini*)

Soit $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille au plus dénombrable d'éléments de $\mathbb{K}$.
On suppose que la famille $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable.

Alors :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} x_{i,j}.$$

Corollaire 17 (*Produit de deux sommes*)

Soit $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_j)_{j\in J}$ deux familles au plus dénombrables d'éléments de $\mathbb{K}$.
On suppose que les familles $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_j)_{j\in J}$ sont sommables.

Alors la famille $(x_i y_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et on a :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j = \left(\sum_{i\in I} x_i\right)\left(\sum_{j\in J} y_j\right).$$

Exemple 3 : Soit x et y deux complexes.

1. Montrer que pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, on a $(i + j)! \geqslant i!j!$.
   En déduire que la famille $\left(\dfrac{x^i y^j}{(i + j)!} \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.
2. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{x^i y^j}{(i + j)!}$.