DM9 (Intégration)
Pour le vendredi 26 janvier

Problème 1 (CCINP)

Ce problème est constitué de trois parties indépendantes.
Dans la Partie I, on calcule la valeur de l'intégrale de Dirichlet en étudiant une intégrale à paramètre.
Dans la Partie II, on calcule la valeur d'une intégrale en utilisant un théorème d'interversion intégrale et somme infinie.
Dans la Partie III, on propose des applications du théorème de convergence de dominée.

Partie I

Q1. Justifier l'existence de l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$.

Q2. Pour $A > 0$, justifier l'existence de l'intégrale $D(A) = \displaystyle\int_0^{A} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.

Q3. Grâce à une intégration par parties, prouver que $D(A)$ a une limite (réelle) quand A tend vers $+\infty$, égale à K. C'est-à-dire que :

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} D(A).$$

Q4. Justifier que l'application $L : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-tx}\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Q5. Montrer que l'application L est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Q6. Justifier que les fonctions $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t}$ sont bornées sur $]0,+\infty[$.
Établir alors que les fonctions $x \mapsto |xL'(x)|$ et $x \mapsto |xL(x)|$ sont majorées sur $\mathbb{R}_+^*$.

En déduire que :

$$\lim_{x\to+\infty} L'(x) = \lim_{x\to+\infty} L(x) = 0.$$

Q7. Pour tout réel $x > 0$, montrer que :

$$L''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$$

On pourra remarquer que $\cos(t) = \mathcal{R}e(e^{it})$.

Q8. En déduire que pour tout réel $x > 0$:

$$L(x) = -\frac{x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2}.$$

Conclure que $K = \dfrac{\pi}{2}$.

Partie II

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Q9. Justifier que la fonction $u \mapsto \dfrac{\ln(u)}{u-1}$ est intégrable sur $]0,1[$.

Q10. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^1 u^k \ln(u) \mathrm{d}u$.

Q11. Grâce au développement en série entière de $u \mapsto \dfrac{1}{1-u}$ sur $]0,1[$, et en précisant le théorème utilisé, justifier que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1} du = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1} \mathrm{d}u$.

Partie III

Q12. Rappeler avec précision le théorème de convergence dominée.

Q13. On considère ici une application continue $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t^n) \mathrm{d}t$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Q14. On suppose ici de plus que $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1]$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n$. *On pourra transformer nI_n grâce à un changement de variable.*

Q15. Application

Déterminer un équivalent quand $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 \sin(t^n) \mathrm{d}t$ (grâce à une intégrale).

Problème 2 (Centrale)

On utilise la fonction Gamma d'Euler (partie I) pour calculer, en partie II, une intégrale dépendant d'un paramètre. Les deux parties sont largement indépendantes.

Si vous avez traité les questions **Q16**, **Q17** et **Q18** dans le DM8, vous pouvez les admettre ici.

I. Autour de la fonction Gamma d'Euler

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cela a un sens, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$.

Q16. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction Γ ?

Q17. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et de $\Gamma(x)$.

En déduire, pour tout $x \in \mathcal{D}$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$, une expression de $\Gamma(x+n)$ en fonction de x, n et $\Gamma(x)$, ainsi que la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

Q18. Montrer l'existence des deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^4} \, \mathrm{d}t$ et les exprimer à l'aide de Γ.

Q19. Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que, pour tout $t > 0$ et tout $x \in [a, b]$,

$$t^x \leqslant \max(t^a, t^b) \leqslant t^a + t^b$$

Q20. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$.
Soit $k \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathcal{D}$. Exprimer $\Gamma^{(k)}(x)$, dérivée k-ième de Γ au point x, sous forme d'une intégrale.

Q21. Montrer que Γ' s'annule en un unique réel ξ dont on déterminera la partie entière.

Q22. En déduire les variations de Γ sur $\mathcal{D}$. Préciser en particulier les limites de Γ en 0 et en $+\infty$. Préciser également les limites de Γ' en 0 et en $+\infty$. Esquisser le graphe de Γ.

II. Une transformée de Fourier

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{-3/4} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \,\mathrm{d}t$, où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

Q23. Montrer que la fonction $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & F(x) \end{array}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Soit k un entier naturel non nul et soit x un réel. Donner une expression intégrale de $F^{(k)}(x)$, dérivée k-ième de F en x. Préciser $F(0)$.

Q24. Montrer qu'au voisinage de $x = 0$, la fonction F peut s'écrire sous la forme

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{(\mathrm{i}x)^n}{n!} \tag{S}$$

où c_n est la valeur de Gamma en un point à préciser.
On exprimera c_n en fonction de n et de c_0.
Quel est le rayon de convergence de la série entière qui apparaît au second membre de (S) ?

Q25. On admet que $\Gamma(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} x^{x-1/2} \mathrm{e}^{-x}$.
Étudier si la série du second membre de (S) converge absolument lorsque $|x| = R$.

Q26. Soit $R(x)$ la partie réelle et $I(x)$ la partie imaginaire de $F(x)$.
Déterminer, au voisinage de 0, le développement limité de $R(x)$ à l'ordre 3 et de $I(x)$ à l'ordre 4.

Q27. Prouver que F vérifie sur $\mathbb{R}$ une équation différentielle de la forme $F' + AF = 0$, où A est une fonction à préciser.

Q28. En déduire une expression de $F(x)$.
On pourra commencer par dériver la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{8} \ln(1 + x^2) + \dfrac{\mathrm{i}}{4} \arctan x$.