Algèbre - Chapitre 8

Matrices et systèmes

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Systèmes linéaires :

1) Interprétation matricielle :

a) Construction :

Soient (S) un système de n équations linéaires, d'inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$. Ainsi, (S) est de la forme

$$(S) : \left\{\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots\dots\dots & +a_{1p}x_p & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots\dots\dots & +a_{2p}x_p & = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 & \dots\dots\dots & +a_{np}x_p & = b_n \end{array}\right.$$

Où $(a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ et $(b_i)_{1 \le i \le n}$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.

On définit naturellement les matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ par

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots\dots\dots & a_{1p} \\ a_{21} & \dots\dots\dots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots\dots\dots & a_{np} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Alors

$$AX =$$

Ainsi $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est solution de (S) si et seulement si la matrice X est solution de

VOCABULAIRE

- $AX = B$ est appelé **ecriture matricielle** du système.
- On appelle **système homogène** associé à un système linéaire d'écriture matricielle $AX = B$ le système d'écriture matricielle $AX = O_{n,1}$.

b) Exemple :

$S_1 : \left\{\begin{array}{ll} 3x + y & = 1 \\ x + 2y & = 2 \end{array}\right.$ a écriture matricielle :

Son système homogène associé est :

c) Système compatible

Définition :
Un système d'équations est dit **compatible** si et seulement si il admet au moins une solution.

En écriture matricielle, cela signifie qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ tel que $AX = B$.

En notant $C_1, \dots C_p$ les colonnes de A, cela signifie :

Propriété 1 :
Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si

2) Résolution d'un système et lien avec les matrices

a) Structure de l'espace des solutions

Proposition 1 :
Soit un système (S), compatible, d'écriture matricielle $AX = B$.
Soit (S_h) le système homogène associé.
Soit X_p une solution de (S).
Alors l'ensemble des solutions de (S) est donné par

$$\{X_p + H ; H \text{ est solution de } S_h\}$$

▷ *Preuve* :

◁

b) Rappel : méthode du pivot de Gauss

A noter : **OPÉRATIONS ÉQUIVALENTES**

On s'autorise les opérations suivantes sur les lignes :

(i) Echanger les lignes i et j : opération notée "$L_i \leftrightarrow L_j$". On dit qu'on a effectué une **permutation**.

(ii) Multiplier une ligne par un scalaire non nul : "$L_i \leftarrow \lambda L_i$". On dit qu'on a effectué une **dilatation**.

(iii) Ajouter à L_i une dilatation de L_j
"$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$". On dit qu'on a effectué une **transvection.**

Remarquons que (ii) et (iii) se font souvent simultanément à travers une opération de la forme $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$, avec $\alpha \neq 0$.

Avec ces opérations, on montre le résultat suivant :

Theorème 1 :

Tout système d'équations linéaires (ou toute matrice...) peut se ramener à un système (ou à une matrice) étagé via des opérations équivalentes.
En outre, le nombre de lignes non nulles (hors second membre) du système (ou matrice) étagé obtenu par cette méthode ne dépend pas du choix des opérations effectuées : ce nombre est appelé **rang du système** (ou de la matrice associée...) et est habituellement noté r.
Le rang d'un système est toujours inférieur au nombre d'équations et au nombre d'inconnues : $r \leq n$ et $r \leq p$.

La preuve de la possibilité de réduire le système provient de l'algorithme ci dessous :

Méthode : **RÉDUCTION D'UN SYSTÈME PAR PIVOT DE GAUSS**

Soit le système

$$(S) : \left\{ \begin{array}{llll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots\dots\dots & +a_{1p}x_p & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots\dots\dots & +a_{2p}x_p & = b_2 \\ \quad\vdots \qquad \vdots & & \quad\vdots & \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + & \dots\dots\dots & +a_{np}x_p & = b_n \end{array} \right.$$

1. On "trie" les lignes du système de sorte que $a_{11} \neq 0$. Si cela est possible, on passe à l'étape 2.

   Si tous les $a_{i,1}$ sont nuls, cela signifie que x_1 n'intervient pas dans la résolution, et que le système peut être vu comme un système à $p-1$ inconnues, qui sont $x_2, \dots, x_p$. On aura alors $x_1 \in \mathbb{K}$ et on recommence cette étape avec

$$(\tilde{S}) : \left\{ \begin{array}{llll} a_{12}x_2 + & \dots\dots\dots & +a_{1p}x_p & = b_1 \\ a_{22}x_2 + & \dots\dots\dots & +a_{2p}x_p & = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots & & \quad\vdots & \quad\vdots \\ a_{n2}x_2 + & \dots\dots\dots & +a_{np}x_p & = b_n \end{array} \right.$$

2. On utilise la ligne L_1 pour "supprimer" les autres inconnues.
   Pour chaque ligne L_i avec $i > 1$, on effectue la transvection $L_i \leftarrow L_i - \dfrac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$.
   On obtient alors :

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rlll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots\dots\dots & +a_{1p}x_p & = b_1 \\ \tilde{a}_{22}x_2 + & \dots\dots\dots & +\tilde{a}_{2p}x_p & = \tilde{b}_2 \\ \vdots \quad & & \quad\vdots & \quad\vdots \\ \tilde{a}_{n2}x_2 + & \dots\dots\dots & +\tilde{a}_{np}x_p & = \tilde{b}_n \end{array} \right.$$

Ce système est constitué :

- d'une première ligne, qui permet d'exprimer la première inconnue x_1 en fonction des $p-1$ autres,
- si $p-1>0$ et $n-1>0$, d'un sous système $\tilde{S}$, de $p-1$ et $n-1$ inconnues :

$$(\tilde{S}) : \left\{ \begin{array}{llll} \tilde{a}_{22}x_2+ & \dots\dots\dots & +\tilde{a}_{2p}x_p & =\tilde{b}_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \tilde{a}_{n2}x_2+ & \dots\dots\dots & +\tilde{a}_{np}x_p & =\tilde{b}_n \end{array} \right.$$

3. On s'arrête si ce système $\tilde{S}$ n'existe pas, ou on recommence à l'étape 1 avec $\tilde{S}$ si ce système existe.

On dit qu'on a alors "réduit" le système via le pivot de Gauss.

Remarque :
A l'étape 2, il peut souvent être préférable d'effectuer l'opération $L_i \leftarrow a_{11}L_i - a_{i1}L_1$, qui est la composition d'une tranvection et d'une dilatation. Ceci permet parfois d'éviter l'apparition de fractions, sources d'erreur de calcul....

c) Traduction en terme de produit matriciel

Définition : Matrices d'opérations élémentaires

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on appelle **matrice de dilatation** la matrice obtenue en multipliant la i ligne de I_n par λ. On la note $D_{i,\lambda}$.
- Pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, on appelle **matrice de permutation** la matrice $P_{i,j}$ obtenue en intervertissant les lignes i et j de I_n.
- Pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on appelle **matrice de transvection** la matrice $T_{i,j,\lambda}$ obtenue en appliquant l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ à I_n.

Proposition 2 : Opérations sur les lignes

Toutes les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ sont obtenues en multipliant à gauche par la matrice d'opération élémentaire correspondante.
Plus précisément :

- $P_{ij}A$ donne la matrice A dont on a interverti les lignes L_i et L_j.
- $T_{i,j,\lambda}A$ revient à effectuer sur A l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$
- $D_{i,\lambda}A$ revient à multiplier la ligne i de A par λ.

▷ *Preuve* :

◁

De manière analogue, on montre le résultat suivant :

Proposition 3 : Opérations sur les lignes

Toutes les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ sont obtenues en multipliant à droite par la matrice d'opération élémentaire de taille p correspondante.
Plus précisément :

- AP_{ij} donne la matrice A dont on a interverti les colonnes C_i et C_j.
- $AT_{i,j,\lambda}$ revient à effectuer sur A l'opération $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$
- $AD_{i,\lambda}$ revient à multiplier la colonne i de A par λ.

II Application à l'inversion des matrices

Rappel : Le groupe $GL_n(\mathbb{K})$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = BA = I_n$.
- L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$.
- Cet ensemble est stable par produit :
  si A et B sont dans $GL_n(\mathbb{K})$, alors $AB \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- Cet ensemble est stable par transposition : si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $A^T \in GL_n(\mathbb{K})$.

1) Opération élémentaire et inversion

Propriété 2 :
Toute matrice d'opération élémentaire est inversible.

▷ *Preuve :*

◁

Corolaire 1 :
Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.

▷ *Preuve :*

◁

2) Méthodes d'inversion :

a) Inversion par résolution du système

Theorème 2 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A est inversible si et seulement si quel que soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ (avec $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) possède une unique solution.

$\triangleright$ *Preuve* :

$\triangleleft$

Méthode : **INVERSION PAR RÉSOLUTION DE SYSTÈME**

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour inverser A, on pose $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ avec $b_1, b_2, \dots, b_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ ("génériques") et on résout le système $AX = B$.

Si ce système admet une unique solution, **sans aucune condition sur** B, c'est que A est inversible et alors $X = A^{-1}B$.

Il suffit ensuite d'identifier A^{-1}.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Cas particulier des matrices 2×2 :

Propriété 3 :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
On appelle **déterminant** de A, noté $|A|$ ou $det(A)$ le nombre

$$det(A) = ad - bc$$

Alors A est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$ et on a alors

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

▷ *Preuve* :

◁

Exemple :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

- $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

b) Inversibilité et matrices triangulaires

Si A est une matrice triangulaire supérieure, alors

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Si tous les coefficients diagonaux sont non nuls, alors tout système associé admet une unique solution (il suffit de remonter depuis le bas). Si l'un des coefficients est nul, le pivot de Gauss donne un rang inférieur au nombre d'inconnues. Le système admet donc soit une infinité, soit pas de solution.
On obtient donc comme résultat :

Proposition 4 :

Une matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si les coefficients diagonaux sont non nuls.

En passant par la transposée, on obtient directement :

Corolaire 2 :

Une matrice triangulaire inférieure est inversible si et seulement si les coefficients diagonaux sont non nuls.

et enfin :

Corolaire 3 :

Soit $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ une matrice diagonale.
Alors A est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls.
On a alors

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

c) Réduction de Gauss-Jordan (ou méthode du miroir) :

D'après le résultat obtenu au théorème 2, la matrice est inversible si et seulement si, quel que soit le second membre, le système admet une unique solution.
Cela signifie qu'à la fin du pivot de Gauss pendant la résolution du système, celui ci est de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \dots & a_{1n}x_n & = b_1 \\ & a_{22}x_2+ & \dots & a_{2n}x_n & = b_2 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{nn}x_n & = b_n \end{array} \right.$$

avec des coefficients diagonaux non nuls.
Autrement dit, on a transformé, via des opérations élémentaires, la matrice A associée en matrice triangulaire supérieure.

On peut continuer ces opérations élémentaires, en effectuant un pivot de Gauss inverse : en utilisant la dernière ligne, on va supprimer la dernière inconnue dans chacune des lignes précédentes, puis à partir de l'avant dernière ligne, supprimer les avant dernière inconnues, et ainsi de suite.
Enfin, en divisant par les coefficients diagonaux, on arrive à un système de la forme

$$\left\{\begin{array}{ccccl} x_1 & & & & = \tilde{b}_1 \\ & x_2 & & & = \tilde{b}_2 \\ & & \ddots & & \quad\vdots \\ & & & x_n & = \tilde{b}_n \end{array}\right.$$

La matrice de ce dernier système est

Il existe donc $E_1, E_2, \dots, E_m$ des matrices d'opérations élémentaires telles que

$$E_1 E_2 \dots E_n A =$$

Ce qui signifie que

Méthode : **INVERSION PAR MIROIR**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour inverser A, on peut utiliser des opérations élémentaires pour transformer A en I_n.
On applique en parallèle les mêmes opérations sur I_n.
Le résultat obtenu sur I_n est alors A^{-1}.

Exemple :

Inversez les matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.