Algèbre Chapitre 8 : Matrices et systèmes
Feuille d'exercices

Exercice 1 :

Déterminez lorsqu'il existe l'inverse des matrices :

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}3&9\\1&3\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}3&-1\\2&3\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&0\\1&0&3\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}\quad F=\begin{pmatrix}1&1&i\\1&i&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}G=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-1\\-2&-5&3\end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

Déterminer en fonction de $m\in\mathbb{R}$ si les matrices suivantes sont inversibles :

$$A=\begin{pmatrix}m&1-m&1+m\\0&1-m&m\\0&0&m\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&1-m\\1-m&4m\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}m&1&0\\1&m&1\\0&1&m\end{pmatrix}$$

Exercice 3 :

Soit $n\geqslant 2$ et A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ suivante :

$$A=\begin{pmatrix}1&\dots&1\\&\ddots&\vdots\\0&&1\end{pmatrix}$$ Montrez que A est inversible et calculer A^{-1}

Exercice 4 :

Soit A une matrice nilpotente. Montrez que A n'est pas inversible.
Montrez que $I-A$ est inversible et donner son inverse.

Exercice 5 : diagonalisation

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}-1&-2\\3&4\end{pmatrix}$

1. Montrez que A est inversible et calculer son inverse.
2. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Résoudre en fonction de λ l'équation $AX=\lambda X$.
3. (a) Soit $U=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et $V=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$. Vérifiez que U et V sont des solutions à l'équation $AX=\lambda X$ pour deux valeurs distinctes de λ que vous préciserez
   (b) On pose P la matrice dont les colonnes sont U et V , c'est à dire
   $$P=\begin{pmatrix}1&-2\\-1&3\end{pmatrix}$$
   Montrez que P est inversible et calculez $D=P^{-1}AP$.
   (c) Montrez par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A^n=PD^nP^{-1}$.
   (d) En déduire pour tout $n\in\mathbb{N}$, A^n.
4. Déterminez l'expression explicite des suites (u_n) et (v_n) définie par

$$u_0=1\quad v_0=2\quad\begin{cases}u_{n+1}&=-u_n-2v_n\\v_{n+1}&=3u_n+4v_n\end{cases}$$