Analyse - Chapitre 6 : Suites - généralités.
- Feuilles d'exercices -

Exercice 1 :

Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées.
Justifiez l'existence de $\sup A$, $\sup B$ et $\sup A \cup B$. Montrez que

$$\sup A \cup B = \max(\sup A, \sup B).$$

Exercice 2 :

1. Soit A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$. Montrez que $\sup A \leq \sup B$ et $\inf B \leq \inf A$.
2. Soit (u_n) une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \sup\{u_p\ ; p \geq n\}$ et $w_n = \inf\{u_p\ ; p \geq n\}$. Etudier les monotonies des suites (v_n) et (w_n).

Exercice 3 :

Exprimez en fonction de n le terme général des suites (u_n) définies par $u_0 = 2$ et les relations suivantes :

1. $u_{n+1} = u_n + 3$.
2. $u_{n+1} = u_n - 5$.
3. $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}$.
4. $u_{n+1} = 5u_n$.
5. $u_{n+1} = 3u_n + 3$.
6. $u_{n+1} = 5u_n - 5$.

Exercice 4 :

Soient $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ et vérifiant pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = 3\alpha_n + \beta_n \\ \beta_{n+1} = 2\alpha_n + 4\beta_n. \end{cases}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \alpha_n + \beta_n$ et $t_n = 2\alpha_n - \beta_n$.

1. Montrer que les suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définies sont géométriques.
2. En déduire une expression de s_n et t_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire une expression de α_n et β_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 : Les Lapins de Fibonacci

On considère des couples de lapins tels que, chaque mois, chaque couple donne naissance à un nouveau couple qui devient lui même productif dès l'âge de 2 mois.

1. Justifiez que la suite (u_n) donnant le nombre de couples de lapins vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
2. Donner l'expression général de la suite (u_n) pour les conditions initiales $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

Exercice 6 :

Exprimez en fonction de n l'expression explicite des suites (u_n) définies par :

1. $\forall n \geq 0, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ et $u_0 = 1$, $u_1 = 4$.
2. $\forall n \geq 0, u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$ et $u_0 = 1$,$u_1 = 2$.
3. $\forall n \geq 1, u_{n+1} = 3u_n + 4u_{n-1}$ et $u_0 = u_1 = 2$.
4. $\forall n \geq 1, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ et $u_1 = 1$, $u_2 = 3$.
5. $\forall n \geq 0, u_{n+2} = 6u_n - u_{n+1}$ et $u_0 = 1$, $u_1 = 2$.

Exercice 7 :

Soit (u_n) la suite réelle définie par récurrence via :

$$u_0 = 1,\ u_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad \text{et } u_{n+2} = u_{n+1} - u_n.$$

Montrez que u_n s'exprime sous la forme $u_n = r\cos(n\omega + \varphi)$, où vous préciserez r, ω et φ.

Exercice 8 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & 1+a_n \end{pmatrix}.$$

   On établira une relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.
2. Donner le terme général a_n en fonction de n.
3. En déduire A^n en fonction de n.

Exercice 9 :

On considère deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0 = 1, y_0 = -1 \text{ et : } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n \\ y_{n+1} = 4x_n - y_n. \end{cases}$$

1. Montrez que la suite (x_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont on précisera la relation de récurrence.
2. Calculer le terme général de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire le terme général de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 10 : presque une SRL2....

On cherche à déterminer l'ensemble des suites réelles $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que (w_n) vérifie la relation de récurrence : $\forall n \geq 2,\ w_{n+2} = -2w_{n+1} - 4w_n + 4$.

1. Supposons que (w_n) est constante. Quelle constante c peut-on prendre pour que (w_n) vérifie la relation proposée ?
2. Soit (w_n) une suite réelle quelconque (pas forcément constante) vérifiant la relation proposée. On pose $v_n = w_n - c$. Déterminez la relation de récurrence d'ordre 2 vérifiée par v_n.
3. En déduire l'expression du terme général de la suite w_n.