

Corrigé du DS5 sujet 2

Exercice 1 : extrait de CCINP 2014 maths 1

Problème

Partie 1 : convergence de séries par transfo d'Abel

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k (B_k - B_{k-1}) = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{k=1}^n a_k B_{k-1}.$$

Dans la dernière somme, on effectue le changement d'indice $j = k - 1$.

$$\begin{aligned} S_n &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} B_j = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n - a_1 B_0 \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k - (a_0 - a_1) B_0 + a_n B_n - a_1 b_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n \end{aligned}$$

2. a) Par théorème, la suite (a_n) étant convergente, la série $\sum_{k \geq 0} a_k - a_{k+1}$ est également convergente (c'est même une CNS).

b) Vérifions que la suite (S_n) des sommes partielles est convergente.

D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$.

Le second terme $(a_n B_n)$ tend vers 0 car produit d'une suite convergente vers 0 et d'une suite bornée.

Le premier terme est une somme partielle de la série de TG $(a_k - a_{k+1}) \times B_k$.

Notons $M > 0$ un majorant de la suite $(|B_n|)$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $|(a_k - a_{k+1}) B_k| \leq |a_k - a_{k+1}| \times M = (a_k - a_{k+1}) \times M$ car (a_k) est une suite décroissante.

Ainsi, $(a_k - a_{k+1}) B_k$ est dominée par une le TG d'une série absolument convergente. Donc $(a_k - a_{k+1}) \times B_k$ est lui même le TG d'une série AC ce qui termine la démonstration de cette question.

3. a) • On demande de calculer la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta}$. Notons que, par hypothèse, $e^{i\theta} \neq 1$.

• Par théorème, $\sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = e^{i\theta} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}}$

b) • Lorsque $\alpha > 1$, la série de TG $\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est absolument convergente donc convergente.

• Lorsque $\alpha \leq 0$, le module du terme général ne tend pas vers 0 donc la série est grossièrement divergente.

• Soit $\alpha \in]0, 1]$.

On va montrer que la série est convergente par application du résultat de la question 2b2.

Notons tout de même que le fait que la série commence à $n = 1$ à la place de $n = 0$ n'a pas d'incidence.

La suite $(\frac{1}{n^\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$ est clairement décroissante et tend vers 0.

D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \sum_{k=1}^n e^{i\theta} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|}$ donc la suite des sommes partielles qui va bien est bornée.

Conclusion : la série est convergente.

4. La série entière converge uniformément sur tout disque fermé de centre 0 inclus dans le disque ouvert $D(0, R)$ ie de la forme $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ avec $r \in]0, R[$.

5. a) Supposons que la série entière $\sum \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ cvu sur $] -1, 1[$ et notons f la fonction limite.

Alors la suite de fonctions $S_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{\sqrt{k}}$ converge uniformément vers f sur $] -1, 1[$.

De plus, 1 est dans l'adhérence de $] -1, 1[$ et la limite quand x tend vers 1^- de $S_n(x)$ existe (dans \mathbb{R}) et vaut $L_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Par conséquence du théorème de la double limite (\mathbb{R} est complet...), la suite (L_n) est convergente ce qui est absurde car la série de TG $\frac{1}{\sqrt{k}}$ est divergente.

Conclusion : la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur $] -1, 1[$.

b) D_α est le disque fermé de centre 0 de rayon 1 privé d'une "calotte"...

c) • L'écriture proposée de D_α ne pose pas de problème. Notons également que dans \mathbb{R}^2 (en dimension finie, donc), toutes normes sont équivalentes...

• Posons $\varphi_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2 \end{cases}$ et $\varphi_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x \end{cases}$.

Par les théorèmes généraux, φ_1 et φ_2 sont clairement continue sur \mathbb{R}^2 .

De plus, les ensembles $] -\infty, 1]$ et $] -\infty, \cos(\alpha)]$ sont deux fermés de \mathbb{R} .

Donc les images réciproques par φ_1 et φ_2 sont des fermés de \mathbb{R}^2 par théorèmes (image réciproque d'un fermé par une application continue...)

Une intersection (quelconque) de fermés est fermée donc $D_\alpha = \varphi_1^{-1}(] -\infty, 1]) \cap \varphi_2^{-1}(] -\infty, \cos(\alpha)])$ est fermé.

- D_α est un fermé d'après ce qui précède et borné (par 1 en norme euclidienne...). En dimension finie, un fermé borné est un compact. Donc D_α est un compact.

d) • $1 \notin D_\alpha$ car $\cos(\alpha) < 1$ (par hypothèse sur α ...)

- Soit $z \in D_\alpha$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $z \neq 1$ ce qui permet d'écrire que $|F_n(z)| = \left| 1 \times \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right| = \frac{|1 - z^{n+1}|}{|1 - z|} \leq \frac{1 + |z|^{n+1}}{|1 - z|} \leq \frac{2}{|1 - z|}$

Il reste à minorer le dénominateur par $1 - x$.

On a $|1 - z|^2 = (1 - x)^2 + y^2 \geq (1 - x)^2 > 0$ car $x \leq \cos(\alpha) < 1$.

Donc $|1 - z| \geq |1 - x| = 1 - x \geq 1 - \cos(\alpha) > 0$ (toujours car $x \leq \cos(\alpha) < 1$...)

Par passage à l'inverse, $\frac{1}{|1 - z|} \leq \frac{1}{1 - x} \leq \frac{1}{1 - \cos(\alpha)}$.

Ainsi, par multiplication par le réel positif 2 : $|F_n(z)| \leq \frac{2}{1 - x} \leq \frac{2}{1 - \cos(\alpha)}$

e) Soit $\alpha \in]0, \pi/2[$.

La suite $(1/\sqrt{n})$ est décroissante et tend vers 0 donc pour appliquer le résultat de la question 3.5.b., il suffit de montrer que la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=1}^n z^k\right)$ est uniformément bornée sur D_α .

Ceci est assuré par la majoration précédente car $\frac{2}{1 - \cos(\alpha)}$ est indépendant de z et de n .

Conclusion : la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur D_α .

Mines MP 2021 : épreuve 2 Un corrigé

Matrices de permutation

1. Notons u_σ l'endomorphisme canoniquement associé à $\omega(\sigma)$. On a alors $u(e_j) = e_{\sigma(j)}$ (où les e_i sont les éléments de la base canonique). Ainsi, pour $\sigma, \sigma' \in B_n$,

$$\forall j, u_{\sigma \circ \sigma'}(e_j) = e_{\sigma \circ \sigma'(e_j)} = u_\sigma(u_{\sigma'}(e_j)) = u_\sigma \circ u_{\sigma'}(e_j)$$

En revenant aux matrices,

$$\boxed{\forall \sigma, \sigma' \in B_n, \omega(\sigma \circ \sigma') = \omega(\sigma)\omega(\sigma')}$$

2. Avec les notations précédentes, u_σ permute les éléments de la base canonique et envoie donc une base orthonormée sur une base orthonormée. $\omega(\sigma)$ représente donc une isométrie en b.o.n et est donc orthogonale.

$$\boxed{\omega(B_n) \subset O_n(\mathbb{R})}$$

3. Multiplier à droite (resp à gauche) $\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ revient à multiplier chaque colonne (resp ligne) par d_j . Ainsi

$$[\text{diag}(d_1, \dots, d_n)\omega(\sigma)]_{i,j} = d_i \delta_{i,\sigma(j)}$$

$$[\omega(\sigma)\text{diag}(d_{\sigma(1)}, \dots, d_{\sigma(n)})]_{i,j} = d_{\sigma(j)} \delta_{i,\sigma(j)} = d_i \delta_{i,\sigma(j)}$$

(pour la dernière égalité : les termes sont nuls si $i \neq \sigma(j)$ et donc égaux ; ils sont aussi égaux si $i = \sigma(j)$)

On a donc montré que

$$\boxed{\text{diag}(d_1, \dots, d_n)\omega(\sigma) = \omega(\sigma)\text{diag}(d_{\sigma(1)}, \dots, d_{\sigma(n)})}$$

4. La propriété (i) signifie qu'il existe $\sigma \in B_n$ telle que $\forall i, d'_i = d_{\sigma(i)}$.

La propriété (ii) s'écrit, puisque les éléments de $\omega(B_n)$ sont des matrices orthogonales, $\omega(\alpha)D' = D\omega(\alpha)$.

Si (i) a lieu, alors (ii) aussi avec $\alpha = \sigma$ (question précédente). Le réciproque est similaire toujours avec la question précédente (et avec $\sigma = \alpha$).

$$\boxed{\text{(i) et (ii) sont équivalentes}}$$

Fonctions de matrices symétriques

5. Le théorème spectral indique que S est diagonalisable en base orthonormée (i.e. via une matrice de passage orthogonale). Comme l'inverse d'une matrice orthogonale est sa transposée et comme les valeurs propres de S sont supposées dans I ,

$$\boxed{\forall S \in S_n(I), \exists \Omega \in O_n(\mathbb{R}), \exists (s_i) \in I^n, S = \Omega^\top \text{diag}(s_1, \dots, s_n)\Omega}$$

6. Notons $J \subset I$ un ensemble tel que $\{s_i, i \in I\} = \{s_j, j \in J\}$ et $\forall i, j \in J, i \neq j \implies s_i \neq s_j$. J est ainsi un ensemble d'indices donnant les éléments distincts parmi les s_i . En notant $d = \text{card}(J)$, l'application $P \in \mathbb{R}_{d-1}[X] \mapsto (P(s_j))_{j \in J} \in \mathbb{R}^d$ est linéaire et injective (si P de degré $\leq d-1$ admet d racines différentes, il est nul). Par dimension, c'est un isomorphisme. $(f(s_j))_{j \in J}$ admet donc un (unique) antécédent. On a alors $P(s_i) = f(s_i)$ pour tout $i \in J$ et cela reste vrai pour les $i \in I$ par choix de J .

$$\boxed{\forall (s_i) \in I^n, \exists P \in \mathbb{R}[X], \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, P(s_i) = f(s_i)}$$

On pourrait même, ce sont les formules d'interpolation de Lagrange, donner une expression explicite d'un P convenable :

$$P = \sum_{j \in J} f(s_j) L_j \quad \text{avec} \quad L_j = \prod_{i \in J \setminus \{j\}} \frac{X - s_i}{s_j - s_i}$$

7. Montrons par récurrence sur k que pour toute matrice inversible Q et toute matrice M , on a

$$(Q^{-1}MQ)^k = Q^{-1}M^kQ$$

- C'est vrai pour $k = 0$.
- Si c'est vrai au rang k alors

$$(Q^{-1}MQ)^{k+1} = (Q^{-1}MQ)^k Q^{-1}MQ = Q^{-1}M^k Q Q^{-1}MQ = Q^{-1}M^{k+1}Q$$

et le résultat est vrai au rang $k + 1$.

Par combinaisons linéaires, on en déduit que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall Q \in GL_n(\mathbb{R}), \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), P(Q^{-1}MQ) = Q^{-1}P(M)Q$$

Par ailleurs, on a aussi

$$\forall k \in \mathbb{R}, \text{diag}(d_1, \dots, d_n)^k = \text{diag}(d_1^k, \dots, d_n^k)$$

et en combinant linéairement

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], P(\text{diag}(d_1, \dots, d_n)) = \text{diag}(P(d_1), \dots, P(d_n))$$

Ici, on a donc (Ω est orthogonale et donc égale à son inverse), P étant le polynôme de la question 6,

$$\Omega^\top \text{diag}(P(s_1), \dots, P(s_n))\Omega = P(S) = (\Omega')^\top \text{diag}(P(s'_1), \dots, P(s'_n))\Omega'$$

De plus, $\text{Sp}(S) = \{s_1, \dots, s_n\} = \{s'_1, \dots, s'_n\}$ et donc $P(s_i) = f(s_i)$ et $P(s'_i) = f(s'_i)$ pour tout i . Ainsi

$$(\Omega')^\top \text{diag}(f(s'_1), \dots, f(s'_n))\Omega' = \Omega^\top \text{diag}(f(s_1), \dots, f(s_n))\Omega$$

Comme $(AB)^\top = B^\top A^\top$, il est immédiat que

$$\Omega^\top \text{diag}(f(s_1), \dots, f(s_n))\Omega \in S_n(\mathbb{R})$$

8. On a $\Omega^\top(D_1 + \lambda D_2)\Omega = \Omega^\top D_1 + \lambda \Omega^\top D_2 \Omega$ qui me semble donner aisément

$$u(\varphi_1 + \lambda \varphi_2)(S) = u(\varphi_1)(S) + \lambda u(\varphi_2)(S)$$

Ceci étant vrai pour tout S , $u(\varphi_1 + \lambda \varphi_2) = u(\varphi_1) + \lambda u(\varphi_2)$ et u est linéaire.

La trace étant linéaire, par composition, v est linéaire.

Soient $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x \in I$. On a $\text{diag}(x, \dots, x) = I_n^\top(xI_n)I_n$ et donc

$$u(\varphi)(xI_n) = I_n^\top \text{diag}(\varphi(x), \dots, \varphi(x))I_n = \varphi(x)I_n$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(\varphi)(xI_n) = \varphi(x)I_n$$

9. Supposons que $u(\varphi) = 0$. Alors $\forall S \in S_n(\mathbb{R}), u(\varphi)(S) = 0$. Avec la question précédente, $\forall x \in I, \varphi(x) = 0$ et donc $\varphi = 0$. Ainsi φ est injective (noyau restreint au neutre).

Si $n = 1$ alors une application V de $S_n(I)$ dans $S_n(\mathbb{R})$ s'assimile à une application φ de I dans \mathbb{R} ($V((x)) = (\varphi(x))$) et on a $V = u(\varphi)$. u est ainsi surjective. Si $n \geq 2$, on peut trouver soit V l'application constante égale à $E_{1,2} + E_{2,1}$, définie sur $S_n(I)$. V est à valeurs dans $S_n(\mathbb{R})$. I étant non vide, il contient un élément x . On a $V(xI_n) = E_{1,2} + E_{2,1}$ qui n'est pas scalaire et n'est donc égale à $u(\varphi)(xI_n)$ pour aucune application φ . Ainsi, V n'a pas d'antécédent par u .

$$u \text{ est non surjective sauf si } n = 1$$

10. On suppose f polynomiale et il lui est donc associé un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in I, P(x) = f(x)$. Soit $S \in S_n(I)$. Il existe des éléments $s_i \in I$ et $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $S = \Omega^\top \text{diag}(s_1, \dots, s_n)\Omega$ et on a

$$u(f)(S) = \Omega^\top \text{diag}(f(s_1), \dots, f(s_n))\Omega = \Omega^\top \text{diag}(P(s_1), \dots, P(s_n))\Omega$$

Avec les remarques faites en question 7, ceci donne

$$u(f)(S) = P(\Omega^\top \text{diag}(s_1, \dots, s_n)\Omega) = P(S)$$

$$\text{Si } f \text{ est polynomiale, il existe } P \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } \forall S \in S_n(I), u(f)(S) = P(S)$$

On suppose, réciproquement, que f est telle qu'un tel polynôme P existe. On a en particulier

$$\forall x \in I, f(x)I_n = u(f)(xI_n) = P(xI_n) = P(x)I_n$$

et donc $\forall x \in I, f(x) = P(x)$. f est donc polynomiale et la réciproque est vraie.

11. On suppose que $\forall x \in I, \varphi_k(x) \rightarrow \varphi(x)$. On se donne alors $S \in S_n(I)$. Il existe des éléments $s_i \in I$ et $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $S = \Omega^\top \text{diag}(s_1, \dots, s_n)\Omega$ et on a

$$u(\varphi_k)(S) = \Omega^\top \text{diag}(\varphi_k(s_1), \dots, \varphi_k(s_n))\Omega = \Omega^\top D_k \Omega$$

(D_k) converge vers $D = \text{diag}(\varphi(s_1), \dots, \varphi(s_n))$ et $M \mapsto \Omega^\top M \Omega$ est continue (par exemple car elle est linéaire en dimension finie). Ainsi, $u(\varphi_k)(S)$ tend vers $u(\varphi)(S)$.

La convergence simple de (φ_k) vers φ sur I entraîne celle de $(u(\varphi_k))$ vers $u(\varphi)$ sur $S_n(I)$

La trace étant une application continue (linéaire en dimension finie)

La convergence simple de (φ_k) vers φ sur I entraîne celle de $(v(\varphi_k))$ vers $v(\varphi)$ sur $S_n(I)$

Avec les mêmes notations, on a

$$u(\varphi_k)(S) - u(\varphi)(S) = \Omega^\top \text{diag}(\varphi_k(s_1) - \varphi(s_1), \dots, \varphi_k(s_n) - \varphi(s_n))\Omega$$

Munissons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne canonique $\|\cdot\|_2$ définie par

$$\|M\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(M^\top M)}$$

La trace étant invariante par similitude, deux matrices orthogonalement semblables ont même norme (calcul aisé). Ainsi

$$\begin{aligned} \|u(\varphi_k)(S) - u(\varphi)(S)\|_2^2 &= \|\text{diag}(\varphi_k(s_1) - \varphi(s_1), \dots, \varphi_k(s_n) - \varphi(s_n))\|_2^2 \\ &= \sum_{i=1}^n |\varphi_k(s_i) - \varphi(s_i)|^2 \\ &\leq n \|\varphi_k - \varphi\|_{\infty, I}^2 \end{aligned}$$

Si (φ_k) converge uniformément vers φ sur I , le majorant, qui est indépendant de S , est de limite nulle. On a ainsi convergence uniforme de $(u(\varphi_k)(S))$ vers $u(\varphi)(S)$. Il est à noter que changer de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est indifférent puisque toutes les normes sont équivalentes en dimension finie.

La convergence uniforme de (φ_k) vers φ sur I entraîne celle de $(u(\varphi_k))$ vers $u(\varphi)$ sur $S_n(I)$

Avec des notations, similaires, on a

$$|v(\varphi_k)(S) - v(\varphi)(S)| = \left| \sum_{i=1}^n (\varphi_k(s_i) - \varphi(s_i)) \right| \leq n \|\varphi_k - \varphi\|_{\infty, I}$$

et là encore

La convergence uniforme de (φ_k) vers φ sur I entraîne celle de $(v(\varphi_k))$ vers $v(\varphi)$ sur $S_n(I)$

Norme et convexité

12. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Par théorème spectral, il existe une base orthonormée (X_1, \dots, X_n) de \mathbb{R}^n (que l'on assimile à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) formée de vecteurs propres pour S . Notons λ_i la valeur propre associée à X_i . Le spectre de S est ainsi constitué des λ_i . Soit $X \in \mathbb{R}^n$ que l'on décompose en $X = x_1 X_1 + \dots + x_n X_n$. On a alors (la base étant orthonormée)

$$\min(\text{Sp}(S)) \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq X^\top S X = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leq \max(\text{Sp}(S)) \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Comme $X^\top X = x_1^2 + \dots + x_n^2$, on a donc

$$\forall X \in \Sigma, \min(\text{Sp}(S)) \leq X^\top S X \leq \max(\text{Sp}(S))$$

Le majorant (resp minorant) est atteint pour $X = X_j$ associé à une valeur propre maximale (resp minimal) et c'est donc un maximum (resp minimum).

$$\boxed{\min(\text{Sp}(S)) = \min\{X^\top S X ; X \in \Sigma\} \text{ et } \max(\text{Sp}(S)) = \max\{X^\top S X ; X \in \Sigma\}}$$

13. Soient $A, B \in S_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in [0, 1]$. On a

$$\forall X \in \Sigma, X^\top ((1 - \lambda)A + \lambda B)X = (1 - \lambda)X^\top A X + \lambda X^\top B X$$

Comme $\lambda \geq 0$ et $1 - \lambda \geq 0$, la question précédente donne

$$\begin{aligned} \min((1 - \lambda)\text{Sp}(A) + \lambda \min(\text{Sp}(B))) &\leq X^\top ((1 - \lambda)A + \lambda B)X \\ &\leq (1 - \lambda) \max(\text{Sp}(A)) + \lambda \max(\text{Sp}(B)) \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} &\text{Sp}((1 - \lambda)A + \lambda B) \\ &\subset [(1 - \lambda) \min(\text{Sp}(A)) + \lambda \min(\text{Sp}(B)), (1 - \lambda) \max(\text{Sp}(A)) + \lambda \max(\text{Sp}(B))] \end{aligned}$$

Comme I est un intervalle, il est convexe. Comme A, B ont un spectre inclus dans I , les bornes de l'intervalle ci-dessus sont dans I et l'intervalle est donc inclus dans I . Ainsi $(1 - \lambda)A + \lambda B \in S_n(I)$. On a montré que

$$\boxed{S_n(I) \text{ est une partie convexe de } S_n(\mathbb{R})}$$

Pour montrer que ρ est une norme sur $S_n(\mathbb{R})$, on a quatre propriétés à prouver.

- ρ est immédiatement positive.
- Si $\rho(S) = 0$ alors 0 est la seule valeur propres de S et comme S est diagonalisable, elle est nulle. Ceci montre l'axiome de séparation.

- Soient $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Les valeurs propres de μS sont les $\mu\lambda$ pour $\lambda \in \text{Sp}(S)$. Comme $x \mapsto |\mu|x$ est croissante, le maximum des $|\mu|\lambda$ est égal à $|\mu|$ fois le maximum des $|\lambda|$. Ainsi $\rho(\mu S) = |\mu|\rho(S)$ et on a l'homogénéité.
- Soient $A, B \in S_n(\mathbb{R})$. On a alors $\text{Sp}(A) \subset [-\rho(A), \rho(A)]$ et idem pour B . On montre comme plus haut que le spectre de $A + B$ est dans $[-\rho(A) - \rho(B), \rho(A) + \rho(B)]$ et donc $\rho(A + B) \leq \rho(A) + \rho(B)$. Ceci donne l'inégalité triangulaire.

ρ est une norme sur $S_n(\mathbb{R})$

Continuité des fonctions de matrices symétriques

14. χ va de $S_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_n[X]$. Les espaces étant de dimension finie, le choix de norme n'importe pas dans l'étude de continuité.

Les coefficients de $\chi(S)$ sont des fonctions polynomiales de ceux de S et donc continues (ce qui est immédiat quand on munit $S_n(\mathbb{R})$ de la norme infinie). Ainsi, les fonctions coordonnées de χ (dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$) sont continues :

χ est continue

15. On suppose que $\rho(M_k - M) \rightarrow 0$ et on a donc $\rho(M_k) \rightarrow \rho(M)$ (par seconde forme de l'inégalité triangulaire).

Ainsi, la suite $(\rho(M_k))$ est une suite bornée, disons majorée par un réel M . En notant $\Lambda_k = (\lambda_{1,k}, \dots, \lambda_{n,k})$, on a

$$\forall k, \|\Lambda_k\| = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_{i,k}| \leq M$$

On a ainsi $(\Lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui est bornée dans \mathbb{R}^n et admet une valeur d'adhérence $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. En notant φ l'extractrice associé, $\lambda_{i,\varphi(k)} \rightarrow \lambda_i$ et le caractère croissant des Λ_k entraîne celui de Λ .

$(\Lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ possède une valeur d'adhérence croissante

16. On sait que χ est continue et donc $\chi(M_k) \rightarrow \chi(M)$. A fortiori, $\chi(M_{\alpha(k)}) \rightarrow \chi(M)$. Or, avec les notation utilisées en question précédente,

$$\chi_{M_{\alpha(k)}} = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_{i,\alpha(k)})$$

Notons μ_i la limite de $\lambda_{i,\alpha(k)}$, les théorèmes d'opération donnent

$$\chi_{M_{\alpha(k)}} = \prod_{i=1}^n (X - \mu_i)$$

Par unicité de la limite, on a donc

$$\chi_M = \prod_{i=1}^n (X - \mu_i)$$

La suite (μ_i) étant croissante (par croissance des λ_k), c'est la suite croissante des valeurs propres de M :

$$\Lambda_{\alpha(k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \text{Sp}_\uparrow(M)$$

17. La suite (Λ_k) possède une valeur d'adhérence (question 15) et celle-ci est forcément $\text{Sp}_\uparrow(M)$. On a une suite à valeurs dans un compact (ses élément appartiennent à une boule fermée, on l'a noté en question 15) qui possède une unique valeur d'adhérence et cette suite est donc convergente. On a montré que $\text{Sp}_\uparrow(M_k) \rightarrow \text{Sp}_\uparrow(M)$. Par caractérisation séquentielle de la limite,

Sp_\uparrow est continue

Si on utilise le résultat de cours sur les suites à valeurs dans un compact, la question 15 ne sert pas. Plus précisément, elle sert juste à justifier, dans sa preuve, que l'on a une suite bornée en dimension finie et donc à valeurs dans un compact.

18. $O_n(\mathbb{R})$ est fermé comme image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application continue $M \mapsto M^\top M$.

C'est aussi une partie bornée car $\forall M \in O_n(\mathbb{R}), \|M\| \leq 1$ (chaque colonne est de norme 1 dans \mathbb{R}^n euclidien).

Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie,

$O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

19. Soit $\varphi \in C^0(I, \mathbb{R})$. Soit (M_k) une suite d'éléments de $S_n(I)$ qui converge dans $S_n(I)$ vers une matrice M . On note encore $\Lambda_k = (\lambda_{1,k}, \dots, \lambda_{n,k})$ son spectre ordonné. Pour chaque entier k , il existe $\Omega_k \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$M_k = \Omega_k^\top \text{diag}(\lambda_{i,k}) \Omega_k$$

On a alors

$$u_\varphi(M_k) = \Omega_k^\top \text{diag}(\varphi(\lambda_{i,k})) \Omega_k$$

On vient de voir que Λ_k converge vers le spectre ordonné $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de M .

Par ailleurs, comme $O_n(\mathbb{R})$ est un compact, il existe une extraite $(\Omega_{\alpha(k)})$ qui converge vers $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$. On a alors

$$M_{\alpha(k)} \rightarrow \Omega^\top \text{diag}(\varphi(\lambda_i)) \Omega \quad \text{et} \quad u_\varphi(M_{\alpha(k)}) \rightarrow \Omega^\top \text{diag}(\varphi(\lambda_i)) \Omega$$

Par unicité de la limite, on a $M = \Omega^\top \text{diag}(\varphi(\lambda_i)) \Omega$ et la seconde limite vaut ainsi $u(\varphi)(M)$. On a donc

$$u_\varphi(M_{\alpha(k)}) \rightarrow u(\varphi)(M)$$

Si on considère la suite $(u(\varphi)(M_k))$, on peut en fait, en travaillant sur une extraire quelconque comme ci-dessus, montrer que $u(\varphi)(M)$ est la seule valeur d'adhérence possible. Or, toutes les suites $(\varphi(\lambda_{i,k}))_{k \in \mathbb{N}}$ étant bornée, la suite $(u(\varphi)(M_k))$ est bornée (au sens de ρ , c'est quasi immédiat et le choix de norme n'importe pas). On est dans la même situation qu'en question 17 et on peut affirmer que $(u(\varphi)(M_k))$ converge vers $u(\varphi)(M)$. $u(\varphi)$ est donc continue. Comme la trace est continue, $v(\varphi)$ est aussi continues.

si $\varphi \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$, alors $u(\varphi)$ et $v(\varphi)$ sont continues

Convexité des fonctions de matrices symétriques

20. Pour une matrice M quelconque, on a $[M]_{i,j} = E_j^\top M E_i$ où E_1, \dots, E_n sont les vecteurs colonnes associés à la base canonique.

Soit $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et soit $U = \Omega^\top S \Omega$. On a alors

$$[U]_{j,j} = Y_j^\top S Y_j \quad \text{avec} \quad Y_j = \Omega E_j$$

Les vecteurs Y_j étant dans Σ (car $E_j \in \Sigma$ et O orthogonale), la question 12 montre que

$$\forall j, \min(\text{Sp}(S)) \leq [U]_{j,j} \leq \max(\text{Sp}(S))$$

Majorant et minorant sont dans I et I est un intervalle. Ainsi

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, [U]_{j,j} \in I$$

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de S (comptées avec multiplicité). Soit $\Omega \in \mathcal{U}_S$. U est orthogonalement semblable à S et il existe $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $U = \Omega^\top \text{diag}((\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}) \Omega$. Avec les notations précédentes, on a

$$\forall j, f([U]_{j,j}) = f\left(Y_j^\top \text{diag}((\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}) Y_j\right) = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i [Y_j]_i^2\right)$$

Comme $Y_j \in \Sigma$, les $[Y_j]_i^2$ sont positifs de somme 1. Par convexité de f , on a donc

$$\forall j, f([U]_{j,j}) \leq \sum_{i=1}^n [Y_j]_i^2 f(\lambda_i)$$

En sommant ces relations, on obtient

$$\sum_{j=1}^n f([U]_{j,j}) \leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n [Y_j]_i^2 f(\lambda_i) = \sum_{i=1}^n \left(f(\lambda_i) \sum_{j=1}^n [Y_j]_i^2 \right)$$

Les Y_j sont en fait les colonnes de Ω et $[Y_j]_i = [\Omega]_{i,j}$. Les lignes de Ω forment aussi une famille orthonormée et les sommes intérieures ci-dessus valent 1. On a donc

$$\sum_{j=1}^n f([U]_{j,j}) \leq \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) = v(f)(S)$$

L'inégalité est une égalité quand $\Omega = I_n$ et on a donc

$$\max \left\{ \sum_{k=1}^n f([U]_{k,k}); U \in \mathcal{U}_S \right\} = v(f)(S)$$

21. Avec la question précédente, il existe une matrice $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ telle qu'en notant $U = \Omega^\top ((1-t)A + tB) \Omega$ on ait

$$v(f)((1-t)A + tB) = \sum_{k=1}^n f([U]_{k,k})$$

Or, $[U]_{k,k} = (1-t)[\Omega^\top A \Omega]_{k,k} + t[\Omega^\top B \Omega]_{k,k}$ et ainsi

$$v(f)((1-t)A + tB) = (1-t) \sum_{k=1}^n f([\Omega^\top A \Omega]_{k,k}) + t \sum_{k=1}^n f([\Omega^\top B \Omega]_{k,k})$$

La question précédente permet de majorer les sommes par $v(f)(A)$ et $v(f)(B)$. En multipliant par t et $1-t$ on ne change pas le sens des inégalités. On trouve

$$v(f)((1-t)A + tB) \leq (1-t)v(f)(A) + tv(f)(B)$$

22. On vient de voir que la convexité de f entraîne celle de $v(f)$.

On suppose, réciproquement, que $v(f)$ est convexe. On applique cette propriété avec $A = xI_n$ et $B = yI_n$ pour $x, y \in I$. On obtient alors

$$\begin{aligned} n f((1-t)x + ty) &= v(f)((1-t)xI_n + tyI_n) \\ &\leq (1-t)v(f)(xI_n) + tv(f)(yI_n) \\ &= n((1-t)f(x) + ty) \end{aligned}$$

ce qui donne la convexité de f .

$$f \text{ est convexe sur } I \text{ ssi } v(f) \text{ l'est sur } S_n(I)$$