Devoir Surveillé n° 5 sujet 2.
le 12 janvier.

Exercice 1 : (CCINP)

1. On considère une suite de réels (a_n), une suite de complexes (b_n) et on note pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.
En remarquant que, pour $k \geqslant 1, b_k = B_k - B_{k-1}$, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n$ (transformation d'Abel).

2. On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle.

a) Démontrer que la série $\sum_{k\geqslant 0}(a_k - a_{k+1})$ converge.

b) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n$ converge.

3. Exemple.
Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Calculer pour n entier naturel non nul, $\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$

b) Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

4. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est une série entière de la variable complexe de rayon $R > 0$, rappeler le résultat du cours concernant la convergence uniforme de cette série.

5. On considère la série entière de la variable complexe $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ de rayon 1.

a) On note $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.
Démontrer que la série de la variable réelle $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$ (en particulier la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur D).

b) On pourra confondre un point de $\mathbb{R}^2$ et son affixe.
pour $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on note D_α l'ensemble des complexes z, tels que $|z| \leqslant 1$ et dont la partie réelle vérifie $\mathrm{Re}(z) \leqslant \cos\alpha$.
Représenter géométriquement l'ensemble D_α dans un repère orthonormé du plan.

c) Démontrer que D_α est une partie fermée de $\mathbb{C}$.
On pourra écrire :

$$D_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leqslant 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leqslant \cos\alpha\}$$

et démontrer que D_α est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.
En déduire que D_α est une partie compacte de $\mathbb{C}$.

d) On note pour $z \in \mathbb{C}$ et n entier naturel, $F_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k$.

Démontrer que pour tout $z \in D_\alpha$ et tout entier naturel n, si $x = \mathcal{R}e(z)$:

$$|F_n(z)| \leqslant \frac{2}{1-x} \leqslant \frac{2}{1-\cos\alpha}$$

e) Démontrer que la série entière $\sum \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur tous les compacts D_α (pour $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$).

Dans ce problème, on propose de définir la notion d'image d'une matrice réelle symétrique par une fonction d'une variable réelle, puis d'étudier quelques propriétés de cette notion (en particulier, relativement à la continuité et à la convexité). Ces notions présentent un intérêt en sciences physiques (statistique ou quantique).

Notations

Dans tout le problème :

— n désigne un entier naturel non nul ;

— si p et q sont des entiers naturels, l'ensemble des entiers k tels que $p \leq k \leq q$ est noté $[\![p, q]\!]$;

— si i et j sont des entiers naturels, alors $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ sinon ;

— B_n désigne l'ensemble des bijections de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même ;

— I est un intervalle de $\mathbf{R}$ qui n'est ni vide ni réduit à un singleton ;

— $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$ désigne l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbf{R}$;

— une fonction φ de I dans $\mathbf{R}$ est dite polynomiale s'il existe P un polynôme réel tel que, pour tout $x \in I$, $\varphi(x) = P(x)$;

— $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (respectivement $D_n(\mathbf{R})$, resp. $S_n(\mathbf{R})$, resp. $O_n(\mathbf{R})$), désigne l'ensemble des matrices carrées (resp. diagonales, resp. symétriques, resp. orthogonales) d'ordre n à coefficients réels, et on confond un élément de $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ avec son unique coefficient ;

— on note Tr l'application trace définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$;

— si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note ${}^tM$ sa transposée, on note $\mathrm{Sp}(M)$ son spectre réel, et si $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $[M]_{i,j}$ est le coefficient de M situé à la i-ème ligne et j-ème colonne ;

— on munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de sa norme infinie, notée $||\cdot||$ et définie par :

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \quad ||M|| = \max\left\{|[M]_{i,j}|\,, 1 \leq i, j \leq n\right\} \ ;$$

— $S_n(I)$ désigne l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbf{R})$ dont le spectre réel est inclus dans I ;

— si $u = (u_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{R}^n$, on dit que ce n-uplet est croissant si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$(i \leq j) \Longrightarrow (u_i \leq u_j) \ ;$$

— si $i_0 \in [\![1,n]\!]$, on appelle nombre d'occurrences de u_{i_0} dans u le cardinal de l'ensemble $\{i \in [\![1,n]\!] \ ; \ u_i = u_{i_0}\}$;

— enfin $\mathrm{Diag}\big((u_i)_{1 \leq i \leq n}\big)$ désigne l'élément D de $D_n(\mathbf{R})$ tel que :

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!]\,,\ [D]_{i,i} = u_i$$

on pourra noter cet élément en extension $D = \mathrm{Diag}(u_1, \ldots, u_n)$.

Matrices de permutations

Le but de cette partie est d'étudier l'action sur les matrices diagonales de la conjugaison par des matrices de permutations. On considère l'application ω de B_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$\forall\, \sigma \in B_n,\, \forall\, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\,,\ [\omega(\sigma)]_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}.$$

1 ▷ Démontrer que pour tout $(\sigma, \sigma') \in B_n^2$, $\omega(\sigma \circ \sigma') = \omega(\sigma)\,\omega(\sigma')$.

2 ▷ Démontrer que $\omega(B_n) \subset O_n(\mathbf{R})$.

3 ▷ Soit $\sigma \in B_n$ et $(d_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{R}^n$. Vérifier que :

$$\mathrm{Diag}\big((d_i)_{1 \leq i \leq n}\big)\,\omega(\sigma) = \omega(\sigma)\,\mathrm{Diag}\big((d_{\sigma(i)})_{1 \leq i \leq n}\big).$$

4 ▷ En déduire l'équivalence suivante concernant deux éléments D et D' de $D_n(\mathbf{R})$,

i) D et D' ont le même ensemble de coefficients diagonaux, chacun ayant le même nombre d'occurrences dans D et D'.

ii) il existe $M \in \omega(B_n)$ telle que $D' = {}^tMDM$.

Fonctions de matrices symétriques

Cette partie a pour objectif de définir une correspondance entre l'espace des fonctions de I dans $\mathbf{R}$ et l'espace des fonctions de $S_n(I)$ dans $S_n(\mathbf{R})$, puis d'en démontrer quelques propriétés. Dans cette partie, f est une fonction de I dans $\mathbf{R}$.

5 ▷ Soit $S \in S_n(I)$. Justifier l'existence de $\Omega \in O_n(\mathbf{R})$ et de $(s_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n$ tels que :

$$S = {}^t\Omega \operatorname{Diag}\big((s_i)_{1\leq i\leq n}\big)\,\Omega.$$

6 ▷ Pour tout $(s_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n$, justifier l'existence d'un élément P de $\mathbf{R}[X]$ tel que :

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!]\,,\ P(s_i) = f(s_i).$$

Soit $S \in S_n(I)$. On suppose que l'on dispose des deux écritures :

$$S = {}^t\Omega \operatorname{Diag}\big((s_i)_{1\leq i\leq n}\big)\,\Omega \quad \text{et} \quad S = {}^t\Omega' \operatorname{Diag}\big((s_i')_{1\leq i\leq n}\big)\,\Omega',$$

avec Ω, $\Omega' \in O_n(\mathbf{R})$ et $(s_i)_{1\leq i\leq n}$, $(s_i')_{1\leq i\leq n} \in I^n$.

7 ▷ Montrer que l'on a alors :

$${}^t\Omega' \operatorname{Diag}\Big(\big(f(s_i')\big)_{1\leq i\leq n}\Big)\,\Omega' = {}^t\Omega \operatorname{Diag}\Big(\big(f(s_i)\big)_{1\leq i\leq n}\Big)\,\Omega,$$

puis que ${}^t\Omega \operatorname{Diag}\Big(\big(f(s_i)\big)_{1\leq i\leq n}\Big)\,\Omega \in S_n(\mathbf{R})$.

Dans la suite du problème, on note u l'application qui, à toute fonction φ de I dans $\mathbf{R}$, associe $u(\varphi)$ la fonction de $S_n(I)$ dans $S_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$\forall\, S \in S_n(I),\ u(\varphi)(S) = {}^t\Omega \operatorname{Diag}\Big(\big(\varphi(s_i)\big)_{1\leq i\leq n}\Big)\,\Omega,$$

où $S = {}^t\Omega \operatorname{Diag}\big((s_i)_{1\leq i\leq n}\big)\,\Omega$, avec $\Omega \in O_n(\mathbf{R})$ et $(s_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n$.

Cette fonction est bien définie puisque, d'après la question précédente, $u(\varphi)(S)$ ne dépend pas du choix des matrices $\Omega \in O_n(\mathbf{R})$ et $D = \operatorname{Diag}\big((s_i)_{1\leq i\leq n}\big)$ avec $(s_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n$, tel que $S = {}^t\Omega D \Omega$.

Enfin, on désigne par v l'application $\operatorname{Tr} \circ u$.

8 ▷ Vérifier que u et v sont linéaires, puis calculer, pour toute fonction φ de I dans $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in I$, $u(\varphi)(xI_n)$.

9 ▷ Étudier l'injectivité et la surjectivité de u.

10 ▷ On suppose que f est polynomiale ; montrer qu'il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $S \in S_n(I)$, $u(f)(S) = P(S)$.

Réciproquement, est-il vrai que, s'il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $S \in S_n(I)$, $u(f)(S) = P(S)$, alors f est polynomiale ?

11 ▷ Démontrer que, si $(\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite de fonctions de I dans $\mathbf{R}$ qui converge simplement sur I vers une fonction φ, alors les suites $\big(u(\varphi_k)\big)_{k\in\mathbf{N}}$ et $\big(v(\varphi_k)\big)_{k\in\mathbf{N}}$ convergent simplement sur $S_n(I)$.

Y a-t-il convergence uniforme sur $S_n(I)$ si l'on suppose que $(\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur I ?

Norme et convexité

L'objectif de cette partie est de munir $S_n(\mathbf{R})$ d'une nouvelle norme qui permettra de compléter l'étude des fonctions de matrices symétriques.

12 ▷ On note $\Sigma = \Big\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})\,;\ {}^tX\,X = 1\Big\}$. Démontrer que si $S \in S_n(\mathbf{R})$ on a :

$$\min\left(\mathrm{Sp}(S)\right) = \min\left\{\,{}^tX\,S\,X\,;\ X\in\Sigma\right\} \text{ et } \max\left(\mathrm{Sp}(S)\right) = \max\left\{\,{}^tX\,S\,X\,;\ X\in\Sigma\right\}.$$

13 ▷ Montrer finalement que $S_n(I)$ est une partie convexe de $S_n(\mathbf{R})$ et que l'application ρ, de $S_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$, qui à toute matrice $M \in S_n(\mathbf{R})$ associe

$$\max\left\{\,|\lambda|\ ;\ \lambda\in\mathrm{Sp}(M)\right\},$$

est une norme sur $S_n(\mathbf{R})$.

Continuité des fonctions de matrices symétriques

Dans cette partie, à l'aide de la norme précédemment introduite, on démontre quelques résultats relatifs à la continuité des fonctions de matrices symétriques. On suppose désormais $S_n(\mathbf{R})$ muni de la norme ρ et on appelle χ l'application de $S_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}[X]$ qui, à tout élément de $S_n(\mathbf{R})$, associe son polynôme caractéristique.

On définit aussi l'application, notée $\mathrm{Sp}_\uparrow$, qui à toute matrice $S \in S_n(\mathbf{R})$, associe son spectre croissant (c'est-à-dire le n-uplet croissant des valeurs propres de S dans lequel le nombre d'occurrences de chaque valeur propre coïncide avec son ordre de multiplicité).

14 ▷ Démontrer que χ est continue.

On souhaite maintenant prouver que $\mathrm{Sp}_\uparrow$ est continue. À cet effet, on introduit un élément M de $S_n(\mathbf{R})$ et une suite $(M_k)_{k\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans $S_n(\mathbf{R})$ qui converge vers M. Si $k \in \mathbf{N}$, on note $\Lambda_k = \mathrm{Sp}_\uparrow(M_k)$.

15 ▷ Démontrer que la suite $(\Lambda_k)_{k\in\mathbf{N}}$ admet une valeur d'adhérence croissante.

16 ▷ Montrer que, si α est une application strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ telle que la suite $(\Lambda_{\alpha(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ converge, alors : $\Lambda_{\alpha(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{Sp}_{\uparrow}(M)$.

17 ▷ En déduire que $\mathrm{Sp}_{\uparrow}$ est continue.

18 ▷ Démontrer que $O_n(\mathbf{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

19 ▷ Démontrer que, si $\varphi \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$, alors $u(\varphi)$ et $v(\varphi)$ sont continues.

Convexité des fonctions de matrices symétriques

On démontre maintenant quelques résultats relatifs à la convexité des fonctions de matrices symétriques. Dans cette partie, f est une fonction de I dans $\mathbf{R}$.

20 ▷ On suppose ici que f est convexe sur I et que $S \in S_n(I)$. On note

$$\mathcal{U}_S = \left\{ {}^t\Omega\, S\, \Omega\,;\, \Omega \in O_n(\mathbf{R}) \right\}.$$

Justifier que pour tout $U \in \mathcal{U}_S$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $[U]_{k,k} \in I$.

Démontrer alors que :

$$\max \left\{ \sum_{k=1}^{n} f\left([U]_{k,k}\right) ;\, U \in \mathcal{U}_S \right\} = v(f)(S).$$

21 ▷ En déduire que, si f est convexe sur I, pour tout $(A, B) \in S_n(I)^2$, pour tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$v(f)\big((1-t)\,A + t\,B\big) \leq (1-t)\,v(f)(A) + t\,v(f)(B).$$

On dit qu'une fonction ψ de $S_n(I)$ dans $\mathbf{R}$ est convexe sur $S_n(I)$ si elle vérifie la relation :

$$\forall\,(A, B) \in S_n(I)^2,\ \forall\, t \in [0, 1], \quad \psi\big((1-t)A + tB\big) \leq (1-t)\psi(A) + t\psi(B).$$

22 ▷ Démontrer finalement que la fonction $v(f)$ est convexe sur $S_n(I)$ si, et seulement si, f est convexe sur I.

Fin du problème