Corrigé du DS 5 sujet 1

Exercice : ccinp 2020 M2 exercice 1

1. $\boxed{A \text{ est symétrique réelle donc diagonalisable}}$ (et même orthodiagonalisable) d'après le théorème spectral.

On observe que :

- $(1,1,1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 4 ;
- $A - I_3$ est de rang 1, donc 1 est une valeurs propres de A ; de plus le sous espace propre associé est engendré par $(1,-1,0)$ et $(1,0,-1)$.

On en déduit que

$$\boxed{A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \operatorname{diag}(4,1,1) \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})}.$$

Pour la suite, on calcule $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2. On pose $B = P\operatorname{diag}(2,1,1)P^{-1} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et on a alors

$$B^2 = P\operatorname{diag}(2,1,1)^2P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

Plus explicitement, $\boxed{B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}}$.

3. $A^n = PD^nP^{-1} = P\operatorname{diag}(4^n,1,1)P^{-1}$, ce qui donne après calculs : $\boxed{A^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}}$.

4. Comme A est diagonalisable, son polynôme minimal π_A est scindé à racines simples qui sont les valeurs propres de A, d'où $\boxed{\pi_A = (X-4)(X-1) = X^2 - 5X + 4}$.

On effectue la division euclidienne de X^n par π_A :

$$X^n = \pi_A Q + aX + b \quad (*)$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

En évaluant (*) en 1 et 4, on obtient le système $\begin{cases} a+b = 1 \\ 4a+b = 4^n \end{cases}$ d'unique solution $(a,b) = \left(\dfrac{4^n-1}{3}, \dfrac{4-4^n}{3}\right)$.

En évaluant maintenant (*) en A, on obtient : $A^n = 0Q(A) + aA + bI_3$, d'où finalement :

$$\boxed{A^n = \frac{4^n-1}{3}A + \frac{4-4^n}{3}I_3}.$$

Remarque : ce résultat est bien cohérent avec celui de la question précédente.

Problème : ccinp 2019 M1 problème

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{a_n x^n}{1-x^n}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

4. Soit $x \in]-1,1[$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 1$, donc $1 - x^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \frac{|a_n x^n|}{1-x^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} |a_n x^n|$, or le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n x^n$ est 1, donc la série $\sum a_n x^n$ cva et par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{a_n x^n}{1-x^n}$ cva.

Pour la remarque : Si on prend $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)^2}\frac{2^n}{1-2^n}$ converge car $\frac{1}{(n+1)^2}\frac{2^n}{1-2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

5. Soit $x \in [-b,b]$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < 1 - b^n \leqslant 1 - x^n$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{|a_n x^n|}{1-x^n} \leqslant \frac{|a_n b^n|}{1-b^n}$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_{\infty,[-b\,;b]} \leqslant \frac{|a_n b^n|}{1-b^n}$. Or la série $\sum \frac{a_n b^n}{1-b^n}$ converge absolument par $Q4$, donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \|f_n\|_{\infty,[-b\,;b]}$ converge, donc la série de fonctions $\sum a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge normalement donc uniformément sur $[-b,b]$.

6. Les f_n sont continues sur $]-1,1[$, la série $\sum f_n$ converge uniformément sur chaque segment $[-b,b] \subset]-1,1[$, donc f est continue sur $]-1,1[$.

Chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$. $\forall x \in]-1,1[$, $f_n'(x) = a_n \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$.

Soit $b \in [0,1[$, alors par le même raisonnement fait en $Q5$, $\forall x \in [-b,b]$; $|f_n'(x)| \leqslant \frac{|na_n|b^{n-1}}{(1-b^n)^2}$, donc $\|f_n'\|_{\infty,[-b\,;b]} \leqslant \frac{|na_n|b^{n-1}}{(1-b^n)^2}$. Or $\frac{na_n b^{n-1}}{(1-b^n)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} na_n b^{n-1}$ et d'après le théorème de dérivation des séries entières, le rayon de convergence de $\sum na_n x^{n-1}$ est celui de $\sum a_n x^n$ c'est à dire 1. Donc la série $\sum na_n b^{n-1}$ converge absolument, et par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \|f_n'\|_{\infty,[-b\,;b]}$ converge.

Donc la série $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout $[-b,b] \subset]-1,1[$ et la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[$, $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$.

Donc $f'(0) = a_1$.

7. • Tout revient à montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forment une partition de A.

Il est évident que chaque $I_n \subset A$, donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n \subset A$.

Soit $(k,p) \in A$, il est clair que $(k,p) \in I_{kp} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n = A$.

Si on suppose que $\exists (k,p) \in I_n \bigcap I_m$, alors $kp = n = m$, donc $I_n = I_m$, donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forment une partition de A.

La famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in A}$ est sommable, par le théorème de sommation par paquets on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n} u_{k,p}\right)$$

• Soit $x \in]-1,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum\limits_{p\geqslant 1} a_n x^{np}$ converge absolument et $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} |a_n||x|^{np} = |a_n|\frac{|x|^n}{1-|x|^n}$ et la série $\sum |a_n|\frac{|x|^n}{1-|x|^n}$ converge par $Q4$, donc la famille donnée est sommable, en appliquant ce qui précède à $u_{n,p} = a_n x^{np}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} a_n x^{np} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{(k,p)\in I_n} a_k x^{kp}$$

.

Or

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{(k,p)\in I_n} a_k x^{kp} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \sum_{(k,p)\in I_n} a_k = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \sum_{d/n} a_d = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n.$$

Et on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} a_n x^{np} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$$

série géométrique.

Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n.$$

8. Ici $a_n = 1$, d'après le cours le rayon de convergence de $\sum x^n$ est 1, donc les résultats de la partie I sont valables et avec les notations de la question 7 $b_n = \sum\limits_{d/n} 1 = d_n$, par application de la question 7

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n.$$

9. Ici $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ a_n = \varphi(n) = \text{Card}\{k \in [\![1,n]\!]\ \ /\ \ k \wedge n = 1\}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ 1 \leqslant a_n \leqslant n$, par comparaison le rayon de la série $\sum a_n x^n$ est 1.

On a les diviseurs de 12 sont $1,2,3,4,6$ et 12, or $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(6) = 2$ et $\varphi(12) = 4$ l'égalité est donc vraie pour $n = 12$.

Soit $x \in]-1,1[$. Par application de la question 7,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n)\frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n,$$

avec ici $b_n = \sum\limits_{d/n} \varphi(d) = n$, alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n)\frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n.$$

Or $\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$, d'après le théorème de dérivation des séries entières :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = x\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Donc

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n)\frac{x^n}{1-x^n} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

10. On a $\forall x \in [0,1[,\ -\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$.

1 est dans l'adhérence de $[0,1[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to 1^-} (-1)^n\frac{x^n}{n} = \frac{(-1)^n}{n} \in \mathbb{R}$, pour $x \in [0,1[$ la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{x^n}{n}$ est une série alternée qui vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n} = 0$ et la suite $\left(\frac{x^n}{n}\right)_n$ est décroissante, alors par CSSA :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k\frac{x^k}{k}\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$. Donc : $\|R_n\|_{\infty,[-b\,;b]} \leqslant \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc la convergence de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{x^n}{n}$ est uniforme sur $[-b\,;b]$, le théorème de la double limite s'applique et on a $-\ln 2 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

11. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*, g_n : x \mapsto a_n\frac{x^{n-1}}{1-x^n}$.

Soit $a \in]0,1[$. On a $\forall x \in [-a,a], \forall n \in \mathbb{N}^*\ 0 < 1-a^n \leqslant 1-x^n$, donc :

$$\forall x \in [-a,a], \forall k \in \mathbb{N}^*\quad \left|(-1)^k\frac{x^{k-1}}{1-x^k}\right| \leqslant \frac{a^{k-1}}{1-a^k}.$$

Donc : $\|g_n\|_{\infty,[-a\,;a]} \leqslant \frac{a^{k-1}}{1-a^k}$.

Or $\frac{a^{k-1}}{1-a^k} \underset{k\to+\infty}{\sim} a^{k-1}$ et la série $\sum a^{k-1}$ converge, donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \|g_n\|_{\infty,[-a\,;a]}$ converge. Donc la série $\sum g_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[-a\,;a]$.

De plus

$$\lim_{x\to 0}(-1)^k\frac{x^{k-1}}{1-x^k} = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad k=1 \\ 0 & \text{si} \quad k\neq 1 \end{cases}$$

le théorème de la double limite s'applique et on a :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n-1}}{1-x^n} = -1$$

Un équivalent de $f(x)$ quand $x\to 0$ est $-x$.

On a $f(0)=0$, donc $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, alors $f'(0)=-1=a_1$ c'est ce qu'on a trouver à la question 6).

12. Toujours $a_n=(-1)^n$ et $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n-1}}{1-x^n}$

Donc $(1-x)f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^{n-1}\frac{(1-x)}{1-x^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n-1}}{1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}}$.

Soit $\forall n\in\mathbb{N}^*;\;\; g_n(x)=(-1)^n\frac{x^{n-1}}{1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}}$.

Or 1 est dans l'adhérence de $[0,1[$, et

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\;\; \lim\limits_{x\to 1^-} g_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$,

Soient $x\in[0,1[$ et $k\in[\![0,(n-1)]\!]$, on a $\quad x^{n-1}\leqslant x^k$:

Donc $nx^{n-1}\leqslant 1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}$,

Alors $\forall x\in]0,1[;\forall n\in\mathbb{N}^*;\;\; |g_n(x)|\leqslant\frac{x^{n-1}}{nx^{n-1}}\leqslant\frac{1}{n}$.

Soit $x\in]0,1[$. Les deux suites $(x^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont décroissantes et elles sont positives, donc la suite $(|g_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante comme elle est positive et tend vers 0, le CSSA s'applique et on a

$$\forall n\in\mathbb{N};\;\; \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}g_k(x)\right|\leqslant|g_{n+1}(x)|\leqslant\frac{1}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Alors la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ converge uniformément sur $]0,1[$, le théorème de la double limite s'applique et on a ;

$\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lim\limits_{x\to 1^-}g_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$ d'après la question 10).

Alors $(1-x)f(x)\underset{x\to 1^-}{\sim} -\ln 2$, qui s'écrit $f(x)\underset{x\to 1^-}{\sim}\frac{-\ln 2}{(1-x)}$.