

Devoir Surveillé n° 5 sujet 1.

le 12 janvier.

Exercice

Dans cet exercice, il est inutile de reproduire tous les calculs sur la copie.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- Q1.** Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable puis déterminer une matrice D diagonale réelle et une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$
- Q2.** Déterminer une matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, que l'on explicitera, vérifiant $B^2 = A$
- Q3.** Déterminer, pour tout entier naturel non nul n , les 9 coefficients de la matrice A^n en utilisant la matrice de passage P
- Q4.** Donner le polynôme minimal de la matrice A et en déduire, à l'aide d'une division euclidienne de polynômes, la matrice A^n comme une combinaison linéaire des matrices A et I_2 .

Problème

Introduction

Dans ce sujet, une série de fonctions L_a est une série de fonctions $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ où $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de réels telle que la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ soit de rayon 1.

Partie I - Propriétés

Soit une série de fonctions $L_a : \sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$

- Q4.** Soit $x \in]-1; 1[$, donner un équivalent de $1 - x^n$ pour n au voisinage de $+\infty$.

Démontrer que pour tout $x \in]-1; 1[$, la série $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge absolument.

Remarque : la série L_a peut parfois converger en dehors de l'intervalle $]-1; 1[$. Donner un exemple de suite $(a_n)_{n \geq 1}$ telle que la série L_a converge en au moins un point x_0 n'appartenant pas à l'intervalle $]-1; 1[$.

- Q5.** Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge uniformément sur tout segment $[-b, b]$ inclus dans l'intervalle $]-1; 1[$.

- Q6.** On pose, pour tout $x \in]-1; 1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.

Justifier que la fonction f est continue sur l'intervalle $]-1; 1[$ et démontrer ensuite que la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $]-1; 1[$. Donner la valeur de $f'(0)$.

Q7. Expression sous forme de série entière.

On note $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Lorsque $(u_{n,p})_{(n,p) \in A}$ est une famille sommable de réels, justifier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(k,p) \in I_n} u_{k,p} \right) \text{ où } I_n = \{(k,p) \in A, kp = n\}.$$

Démontrer que pour tout $x \in]-1; 1[$, la famille $(a_n x^{np})_{(n,p) \in A}$ est sommable.

En déduire que pour tout $x \in]-1; 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ où $b_n = \sum_{d|n} a_d$.

($d|n$ signifiant d divise n).

Partie II - Exemples

Q8. Dans cette question, pour $n \geq 1$, $a_n = 1$ et on note d_n le nombre de diviseurs de n . Exprimer

pour $x \in]-1; 1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ comme la somme d'une série entière.

Q9. Dans cette question, pour $n \geq 1$, $a_n = \varphi(n)$ où n est le nombre d'entiers naturels premiers à n et inférieurs à n .

Justifier que la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ est de rayon 1.

On admet que pour $n \geq 1$, $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$. Vérifier ce résultat pour $n = 12$.

Pour $x \in]-1; 1[$, exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n}$ sous forme d'un quotient de deux polynômes.

Q10. En utilisant le théorème de la double limite, établir à l'aide du développement en série entière

de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $]-1; 1[$, la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Q11. Dans cette question et la suivante, pour $n \geq 1$, $a_n = (-1)^n$ et pour tout $x \in]-1; 1[$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}.$$

En utilisant le théorème de la double limite calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ et donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0. Retrouver le dernier résultat de la question **Q6**.

Q12. Démontrer qu'au voisinage de 1, $f(x) \sim \frac{-\ln 2}{1-x}$.

On pourra remarquer que pour $x \in]0; 1[$, $\frac{1-x}{1-x^n} = \frac{1}{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}}$.