DM 4- Polynômes - Primitives et intégrales

Exercice 1 (Polynômes de Tchebitchev)

On considère les polynômes à coefficients réels $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définis de la façon suivante :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = X \\ \forall n \geq 0,\ P_{n+2} + P_n = 2XP_{n+1} \end{cases}$$

1. Calculez P_2 et P_3.
2. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré de P_n est n et que le coefficient dominant est 2^{n-1}
3. Déterminez en fonction de n la parité de P_n, c'est à dire : a-t-on pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(-x) = P_n(x)$ (on dit que P_n est pair) ? a-t-on pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(-x) = -P_n(x)$ (on dit que P_n est impair) ?
4. a) Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, montrez que $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
   b) Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.
   c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(nx) = 0$.
   d) En déduire que P_n admet n racines réelles que l'on précisera, et donnez une factorisation de P_n dans $\mathbb{R}[X]$.

---

1. On trouve $P_2 = 2X^2 - 1$ et $P_3 = 4X^3 - 3X$
2. On procède par récurrence double :
   Initialisation : on a bien P_1 de degré 1, avec coefficient dominant $1 = 2^{1-1}$. De même, P_2 est de degré 2, avec coefficient dominant $2 = 2^{2-1}$
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n soit de degré n, avec coeff dominant 2^{n-1} et que P_{n+1} soit de degré $n+1$, avec coeff dominant 2^n.
   Ainsi, il existe un polynôme Q, avec $deg(Q) \leq n-1$ tel que $P_n = 2^{n-1}X^n + Q$ et un polynome R, avec $deg(R) \leq n$ tel que $P_{n+1} = 2^n X^{n+1} + R$.
   On a alors $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n = 2X2^nX^{n+1} + 2XR - P_n = 2^{n+1}X^{n+2} + 2XR - P_n$
   Comme P_n est de degré n et $deg(R) \leq n$, on a $deg(2XR) \leq n+1$ et donc $deg(2XR - P_n) \leq n+1$. Ainsi, le terme dominant de P_{n+2} est $2^{n+1}X^{n+2}$, donc $deg(P_{n+2}) = n+2$ et le coefficient dominant est $2^{n+1} = 2^{n+2-1}$
   L'hérédité est donc vérifiée, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré de P_n est n et le coefficient dominant est 2^{n-1}
3. A nouveau, il s'agit de faire une récurrence double. Cette question est en fait assez difficile à rédiger proprement :
   Montrons par récurrence double que si n est pair, P_n est pair, et si n impair, P_n est impair, c'est à dire que P_n est de la parirté de n.
   Initialisation : on a bien P_0 pair et P_1 impair.
   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que P_n soit de la parité de n, et que P_{n+1} soit de la parité de $n+1$.
   Pour avancer, il faut distinguer deux cas.

   - si n pair, donc si P_n est pair et P_{n+1} impair. On veut montrer que P_{n+2} est de même parité que $n+2$, donc pair :
     Alors de $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$, il vient, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
     $$P_{n+2}(-x) = -2xP_{n+1}(-x) - P_n(-x)$$
     Or $P_{n+1}(-x) = -P_{n+1}(x)$ et $P_n(-x) = P_n(x)$, donc
     $$P_{n+2}(-x) = 2xP_{n+1}(x) - P_n(x) = P_{n+2}(x)$$
     Ainsi P_{n+2} est pair.
   - Si n est impair, on montre de même que P_{n+2} est impair aussi, en partant de P_n impair et P_{n+1} impair.

   Conclusion : P_n est de la même parité que n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. a) On a $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$,
En faisant la somme des égalités, il vient

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$$

et en divisant par 2 on obtient l'égalité voulue.

b) Encore une récurrence double !
Initialisation : on a bien $P_0(\cos(x)) = 1 = \cos(0x)$ et $P_1(\cos(x)) = \cos(x) = \cos(1x)$
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ et $P_{n+1}(\cos(x)) = \cos((n+1)x)$.
Comme $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$, on obtient :

$$\begin{aligned} P_{n+2}(\cos(x)) &= 2\cos(x)P_{n+1}(\cos(x)) - P_n(\cos(x)) \\ &= 2\cos(x)\cos((n+1)x) - \cos(nx) \\ &= \cos(x+(n+1)x) + \cos(x-(n+1)x) - \cos(nx) \\ &= \cos((n+2)x) + \cos(-nx) - \cos(nx) \\ &= \cos((n+2)x) \end{aligned}$$

Conclusion : on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $P_n(\cos(x)) = \cos(nx)$

c) On résout l'équation proposée :

$$\cos(nx) = 0 \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/nx = \frac{\pi}{2} + k\pi \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/x = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$$

Pour simplifier la lecture de la suite, notons $\theta_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{k}{n}\pi$.
Ainsi, $P_n(\cos(\theta_k)) = \cos(n\theta_k) = 0$: les $\cos(\theta_k)$ sont donc des racines de P. Or, on a $0 < \frac{\pi}{2n} < \frac{\pi}{2n} + \frac{k}{n}\pi + \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2n} + \frac{2}{n}\pi < \frac{\pi}{2n} + \frac{n-1}{n}\pi < \pi$ donc pour $k \in [\![0; n-1]\!]$, les $\cos(\theta_k)$ sont tous distincts : cela donne n racines distinctes, et comme P_n est de degré n, on a les n racines de P_n.
On peut donc écrire $P_n = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{k}{n}\pi)\right)$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$, et on considère les fonctions F et G définies par

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}dt \text{ et } G(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1+t^2}dt$$

1. Justifiez que F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Quel lien entre F et f ? que vaut F' ?
3. Justifiez que G est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ également.
4. Exprimez G en fonction de F.
5. En déduire que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. Calculez $G'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et donner une expression simple de la fonction G.

---

1. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème du cours, F est l'une d'entre elle (celle qui s'annule en 1).
2. Comme annoncé précédemment, F est une primitive de f et $F' = f$.
3. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$ également, l'intégrale de f entre $\frac{1}{x}$ et x existe, donc G est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. C'est la formule de calcul intégral : F est une primitive de f, donc

$$\int_{\frac{1}{x}}^x f(t)dt = [F(t)]_{\frac{1}{x}}^x = F(x) - F(\frac{1}{x})$$

5. F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée f qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue également sur $\mathbb{R}_+^*$ et par composition et somme de fonction de classe $\mathcal{C}^1$, G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. On calcul simplement en faisant attention à la composition :

$$\begin{aligned} G'(x) &= F'(x) - (-\frac{1}{x^2})F'(\frac{1}{x}) = f(x) + \frac{1}{x^2} f(x) \\ &= \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{x^2}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \frac{\ln x}{1+x^2} - \frac{\ln x}{x^2+1} \\ G'(x) &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi G est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $G(1) = \displaystyle\int_1^1 f(t)dt = 0$, on en déduit $G(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.