

,

## Corrigé du devoir à la maison n° 6

## I Partie I - Comportement d'une population de dipôles dans un champ magnétique

## I.1 Dipôles magnétiques

- 1 D'après le cours on a directement  $\vec{\mu} = \pi R^2 I \vec{e}_z$ .
- 2 Les charges de la sphère décrivent des trajectoires circulaires d'axe  $Oz$  toutes dans le même sens, constituant ainsi des spires élémentaires de moments magnétiques non nuls. Par sommation la sphère entière aura également un moment magnétique non nul colinéaire à  $Oz$ . Si les charges sont positives, avec un vecteur rotation dans le sens de  $Oz$  le moment magnétique sera porté par  $+\vec{e}_z$ .
- 3 Dans le tableau on note que  $\mu_P$  est exprimé en  $J T^{-1}$  alors qu'on s'attend plutôt à  $A m^2$ . En fait d'après l'expression de l'énergie potentielle d'interaction d'un moment magnétique avec un champ magnétique extérieur  $E_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$  on voit qu'effectivement  $J T^{-1}$  est une unité possible pour le moment magnétique.
- 4 On aura équilibre si le couple est nul ce qui d'après la formule rappelée n'est possible que si  $\vec{\mu}$  est colinéaire ou anticolinéaire au champ magnétique. Dans le premier cas l'énergie potentielle est maximale (et donc correspond à une position d'équilibre instable) et vaut  $\|\vec{\mu}\| \times |B_0|$ . Dans le deuxième cas elle est minimale (équilibre stable) et vaut  $-\|\vec{\mu}\| \times |B_0|$ .
- 5 On a donc directement une différence d'énergie de  $2\mu_P B_0 = 3 \times 10^{-26} J = 2 \times 10^{-7} eV$ .
- 6 À  $37 C$  l'énergie d'agitation thermique vaut  $k_B T = 4.3 \times 10^{-21} J = 0.027 eV$ . On voit donc que l'énergie d'agitation thermique est bien plus grande que la différence entre les deux niveaux d'énergie précédents. Autrement dit à température ordinaire le proton a autant de chance d'être dans une configuration que dans l'autre.
- 7 On constate donc que l'énergie pour inverser la configuration du proton est très faible devant celle nécessaire à la rupture d'une liaison OH ou à l'ionisation d'un atome d'hydrogène. Autrement dit d'une part cela est sans danger sur le corps humain et d'autre part les molécules étudiées ne seront pas modifiées.
- 8 D'après la loi de Boltzmann  $p = A \exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$
- 9 Il vient donc  $N_+ = A \exp\left(-\frac{\mu B_0}{kT}\right)$  et  $N_- = A \exp\left(\frac{\mu B_0}{kT}\right)$ , d'où le rapport  $\frac{N_+}{N_-} = \exp\left(-2\frac{\mu B_0}{kT}\right)$  Un développement à l'ordre 1 donne alors  $\frac{N_+}{N_-} = 1 - 2\frac{\mu B_0}{kT}$ .
- 10 D'après la relation précédente on a clairement  $N_+ < N_-$ . C'est normal. À l'équilibre thermique les niveaux d'énergie inférieure sont toujours plus peuplés que ceux de plus haute énergie.

□ 11 Il vient facilement  $\eta_0 = \frac{1 - \frac{N_+}{N_-}}{1 + \frac{N_+}{N_-}} = \frac{\mu B_0}{kT}$  au premier ordre.

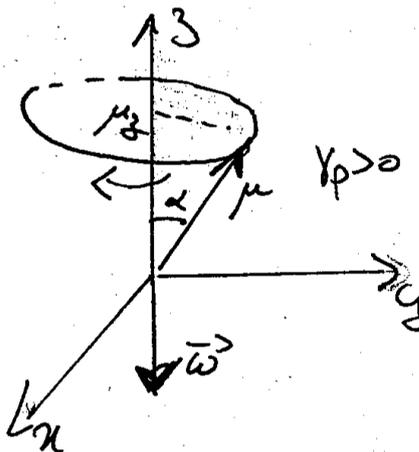
- 12 L'application numérique donne  $\eta_0 = 3 \times 10^{-6}$ . Il y a donc quasiment autant de protons orientés dans chaque sens.

## I.2 Rapports gyromagnétiques

- 13 On a directement  $\vec{\mu}_e = -\frac{1}{2}r_B e v \vec{e}_z$ .
- 14 Pour cette trajectoire circulaire on a  $\vec{\sigma}_0 = m \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = m r_B v \vec{e}_z$ .
- 15 Il vient donc  $\gamma_e = -\frac{e}{2m} = -8.8 \times 10^{10} \text{ rad s}^{-1} \text{ T}^{-1}$ .
- 16 Si on calcule  $\frac{\mu_p}{\frac{\hbar}{2}}$  on obtient  $2.67 \times 10^8 \text{ rad s}^{-1} \text{ T}^{-1}$  ce qui est cohérent avec la donnée de l'énoncé.
- 17 Il vient directement une différence d'énergie  $\Delta E = \hbar \gamma_p B_0 = h \nu$ , soit  $\nu = \frac{\gamma_p B_0}{2\pi}$ .
- 18 L'application numérique donne  $\nu = 42 \text{ MHz}$ , d'où une longueur d'onde  $\lambda = \frac{c}{\nu} = 7.1 \text{ m}$ .  
On est dans le domaine des ondes radios.

## I.3 Précession d'un dipôle

- 19 Si on applique le théorème du moment cinétique en  $O$  au dipôle il vient  $\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$ ,  
soit  $\frac{d\vec{\mu}}{dt} = -\gamma_p \vec{B}_0 \wedge \vec{\mu}$  ce qui est de la forme demandée avec  $\vec{\omega}_0 = -\gamma_p \vec{B}_0$ .
- 20 On peut calculer  $\frac{d\|\vec{\mu}\|^2}{dt} = 2\vec{\mu} \cdot \frac{d\vec{\mu}}{dt} = 0$  d'après l'équation différentielle précédente. Ceci montre que la norme du moment magnétique est constante.  
De même  $\mu_z = \vec{\mu} \cdot \vec{e}_z$ . On a alors  $\frac{d\mu_z}{dt} = \frac{d\vec{\mu}}{dt} \cdot \vec{e}_z = 0$  là aussi. Ceci montre que la projection du moment magnétique sur l'axe  $Oz$  se conserve.
- 21 On voit donc que la projection du moment magnétique dans le plan orthogonal au champ magnétique décrit un mouvement circulaire. En projection sur les axes  $Ox$  et  $Oy$  il vient  $\frac{d\mu_x}{dt} = \gamma_p B_0 \mu_y$  et  $\frac{d\mu_y}{dt} = -\gamma_p B_0 \mu_x$ . En combinant les deux équations il vient  $\frac{d^2\mu_x}{dt^2} + \gamma_p^2 B_0^2 \mu_x = 0$  et  $\frac{d^2\mu_y}{dt^2} + \gamma_p^2 B_0^2 \mu_y = 0$ , ce qui montre qu'il s'agit d'un mouvement circulaire à vitesse angulaire constante  $\omega_0 = \gamma_p B_0$ .  
Le sens du couple s'exerçant sur le moment magnétique montre que le sens de rotation est tel que le vecteur rotation est porté par  $-\vec{e}_z$  si  $\gamma_p > 0$ .
- 22 Le schéma décrivant le mouvement est alors le suivant :



## I.4 Précession de l'aimantation

- 23 Le vecteur aimantation  $\vec{M}_0$  est porté par  $\vec{e}_z$ . On peut même préciser que comme il y a plus de moments colinéaires que de moment anticolinéaires  $\vec{M}_0$  est porté par  $+\vec{e}_z$ .
- 24 On peut écrire  $\vec{M}_0 = \mu_p \vec{e}_z N_- - \mu_p \vec{e}_z N_+ = \mu_p N \eta \vec{e}_z$ , soit  $M_0 = \mu_p N \eta$ .
- 25 On a donc en exploitant l'expression de  $\eta$  établie plus haut  $M_0 = \frac{NB_0}{kT} \mu_p^2$ . Or  $\mu_p = \frac{\gamma_p \hbar}{2}$ , soit pour finir  $M_0 = \frac{NB_0 \hbar^2 \gamma_p^2}{4kT}$ .
- 26 Dans un mètre cube d'eau on trouve  $5.5 \times 10^4$  mol d'eau, soit  $3.44 \times 10^{28}$  molécules d'eau. Or chaque molécule comporte deux protons, on obtient donc  $6.7 \times 10^{28}$  protons par mètre cube.
- 27 Il faut calculer le nombre total de protons dans le corps humain. En utilisant le résultat précédent pour un homme de 75 kg on trouve  $5 \times 10^{27}$  protons, d'où un moment dipolaire total valant  $2.3 \times 10^{-4}$  A m<sup>2</sup>. L'application numérique donne alors un champ magnétique créé par ce dipôle valant  $4.6 \times 10^{-11}$  T. Remarque : attention  $M_0$  est une aimantation, pas un moment magnétique...
- 28 Le champ intense fixe permet l'apparition d'une aimantation notable dans l'échantillon, mais le champ correspondant sera faible et statique. Si on en reste là l'aimantation est permanente et on ne peut rien faire alors de manière dynamique. Pour cela il faut introduire le champ perturbateur.
- 29 Le terme faisant intervenir le produit vectoriel est le terme étudié dans le début de cette partie et qui est à l'origine de la précession.
- Le couple complémentaire qui traduit la relaxation est alors  $\vec{C}(0) = -\frac{M_x}{T_2} \vec{e}_x - \frac{M_y}{T_2} \vec{e}_y + \frac{M_0 - M_z}{T_1} \vec{e}_z$ . Il s'agit globalement d'un couple de frottement mais anisotrope (car les temps de relaxation longitudinale et transversale sont différents).
- 30 Les longueurs d'onde de radio-fréquences s'étendent du millimètre à la centaine de kilomètre. La valeur trouvée à la question 18 correspond bien à une radio fréquence.

## II Les champs magnétiques

### II.1 Création d'un champ $B_1$ tournant

- 31 Les équations de Maxwell dans le vide sont :
- L'équation de Maxwell-Gauss  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ .
  - L'équation de Maxwell-Faraday  $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ .
  - L'équation de Maxwell-Flux  $\text{div} \vec{B} = 0$ .
  - L'équation de Maxwell-Ampère  $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ .

En régime quasistationnaire on va négliger le courant dit de déplacement dans l'équation de Maxwell-Ampère qui devient  $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ .

- 32 L'énoncé du théorème d'Ampère affirme que la circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé orienté est égale à  $\mu_0$  (perméabilité magnétique du vide) que multiplie l'intensité des courants enlacés par le contour (i.e. l'intensité qui traverse une surface s'appuyant sur le contour).
- 33 Tout plan contenant l'axe  $Oz$  est un plan d'antisymétrie de la distribution de courants. Tout plan perpendiculaire à l'axe  $Oz$  est un plan de symétrie des courants. La distribution est invariante par translation parallèlement à  $Oz$  et par rotation autour de  $Oz$ .

Soit un point  $M$  de l'espace quelconque. Le plan perpendiculaire à  $Oz$  et passant par  $M$  est un plan de symétrie de la distribution de courants, donc le champ en  $M$  lui est perpendiculaire et donc porté par  $\vec{e}_z$ . En coordonnées cylindriques les invariances font que cette composante ne dépend que de  $r$ .

Si on prend un contour rectangulaire dans un plan contenant  $Oz$ , dont deux côtés (de longueur  $\ell$ ) sont parallèles à  $Oz$  et aux distances  $r_1$  et  $r_2$ , la circulation le long de ce contour va donner  $\pm\ell(B(r_1) - B(r_2))$  ( $\pm$  selon l'orientation du contour).

Si  $r_1$  et  $r_2$  sont supérieurs au rayon du solénoïde, l'intensité des courants enlacés est nulle et on en déduit  $B(r_1) = B(r_2)$  ce qui montre que le champ magnétique est uniforme à l'extérieur du solénoïde.

Si  $r_1$  et  $r_2$  sont inférieurs au rayon du solénoïde, l'intensité des courants enlacés est également nulle et on en déduit  $B(r_1) = B(r_2)$  ce qui montre que le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde.

On a donc bien montré ce qui était attendu.

- 34 On prend cette fois-ci  $r_1$  supérieur au rayon du solénoïde et  $r_2$  inférieur. On oriente le contour pour que le côté pour lequel  $r = r_2$  soit parcouru dans le sens des  $z$  croissants. La circulation est alors simplement  $\ell B(r_2)$ . L'intensité des courants enlacés avec la convention de l'énoncé est alors simplement  $\ell nI$ . L'application du théorème d'Ampère donne finalement  $\vec{B} = \mu_0 nI \vec{u}_\Delta$  dans le solénoïde.
- 35 Par superposition il vient facilement  $\vec{B} = \mu_0 nI_0 (\cos(\Omega t) \vec{e}_x + \cos(\Omega t + \pi/2) \vec{e}_y) = \mu_0 nI_0 (\cos(\Omega t) \vec{e}_x - \sin(\Omega t) \vec{e}_y)$  ce qui montre qu'il s'agit bien d'un champ tournant à la vitesse angulaire  $\omega = \Omega$  dans le sens indirect autour de  $Oz$  (vecteur rotation  $\vec{\omega} = -\Omega \vec{e}_z$ ). Sa norme est  $B_1 = \mu_0 nI_0$ .
- 36 Il suffit d'écrire  $2B_1 \cos(\omega t) \vec{e}_x = B_1 (\cos(\Omega t) \vec{e}_x + \sin(\Omega t) \vec{e}_y) + B_1 (\cos(\Omega t) \vec{e}_x - \sin(\Omega t) \vec{e}_y)$  ce qui est bien la superposition de deux champs de norme  $B_1$  tournant avec des vitesses angulaires opposées.

## II.2 Création d'un champ permanent intense $B_0$

- 37 En traduisant le fait que la même intensité doit traverser une même surface élémentaire  $dS$  prise dans un plan contenant l'axe  $Oz$  il vient  $\vec{j} = \frac{I_0}{a^2} \vec{e}_\theta$ .
- 38 Les symétries sont bien sûr les mêmes que pour un solénoïde simple.  
À l'extérieur du solénoïde épais le champ est nul par superposition des champs nuls créés par chaque solénoïde. On prend alors un contour rectangulaire identique à ceux utilisés précédemment avec  $r_2 = 0$  et  $r_1 > R_2$ . La circulation vaut  $\ell B(0)$ . L'intensité se calcule par le flux de  $\vec{j}$  ce qui donne facilement  $\ell (R_2 - R_1) \frac{I_0}{a^2}$ . L'application du théorème d'Ampère donne bien  $\vec{B}(0) = \mu_0 (R_2 - R_1) \frac{I_0}{a^2} \vec{z}$ .
- 39 D'après la relation précédente  $I_0 = \frac{Ba^2}{\mu_0 (R_2 - R_1)} = 16 \text{ A}$  (on se donne quand même 2CS...). La puissance dissipée par effet Joule est sans doute importante... il faudra prévoir de refroidir le dispositif...
- 40 L'équation de Maxwell-Ampère montre qu'en dimension on a  $\frac{[B]}{L} = [\mu_0][j]$  et ici on a  $[\Lambda] = \frac{[j]}{L[B]} = \frac{1}{[\mu_0]L^2}$ . En unité on voit donc que  $\Lambda$  s'exprime en  $H^{-1}.m^{-1}$ .
- 41 On calcule bien sûr  $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{B})) = \vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{B})) - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B}$  par l'équation de Maxwell-Flux. Par ailleurs  $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{B})) = \vec{\text{rot}}(\mu_0 \vec{j}) = -\mu_0 \Lambda \vec{B}$ . On aboutit donc à  $\Delta \vec{B} - \mu_0 \Lambda \vec{B} = \vec{0}$ .

- 42 Par homogénéité  $\delta = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \Lambda}}$  est homogène à une distance.
- 43 On peut imaginer que la distribution de courants qui crée le champ extérieur est invariante par translation parallèlement à  $Oy$  et  $Oz$  ce qui fait que le champ ne dépend que de  $x$ , d'où la forme proposée.
- 44 Chaque composante (indiquée par  $i$ ) vérifie  $\frac{d^2 B_i}{dx^2} - \frac{B_i}{\delta^2} = 0$  et donc aura une forme  $B_i(x) = \alpha_i \exp -\frac{x}{\delta} + \beta_i \exp \frac{x}{\delta}$ . La non divergence en  $x = -\infty$  amène que  $\alpha_i = 0$ . La continuité du champ en  $x = 0$  amène  $\beta_x = 0, \beta_y = 0$  et  $\beta_z = B_0$ . Pour conclure dans le supraconducteur  $\vec{B} = B_0 \exp \frac{x}{\delta} \vec{e}_z$ .
- 45 L'équation de Maxwell-Ampère donne facilement  $\vec{j} = -\frac{B_0}{\mu_0 \delta} \exp \frac{x}{\delta} \vec{e}_y$ . On voit donc que  $\delta$  est une distance caractéristique (épaisseur) sur laquelle le champ et les courants sont localisés (près de la surface  $x = 0$ ).
- 46 On voit donc que le champ et les courants sont quasiment en surface du supra conducteur et qu'ils sont nuls dans le supraconducteur.
- 47 Le champ va décroître très rapidement dans les quelques premiers  $\delta$  de l'épaisseur du supraconducteur. Il n'est pas très clair si le champ vaut  $\vec{B}_0$  qu'à l'intérieur du cylindre, ou si c'est également le cas à l'extérieur (situation plus réaliste). L'allure demandée est donnée ci-après dans la première hypothèse.

