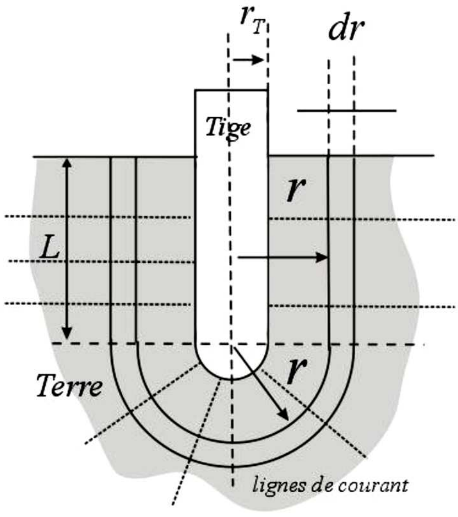
5.1.2 Conduction électrique-Exercice 5

Afin de protéger une installation électrique, on ajoute un fil de terre (jaune et vert) relié à une tige très conductrice de forme cylindrique plantée sur une longueur L dans le sol, de rayon r_T et terminée par une extrémité hémisphérique.



a-Rappeler l'expression de la résistance R_b d'un barreau de section S, de longueur ℓ et de résistivité ρ.

b-Justifier que la résistance du sol peut s'exprimer par la relation :

$$R_s = \int_{r_T}^{+\infty} \frac{\rho dr}{S(r)}$$

où ρ est la résistivité du sol et S(r) est l'aire latérale d'un cylindre de longueur L et de rayon r plus l'aire de la demi-sphère de rayon r.

c-Préciser l'expression de S(r).

d-Déduire l'expression littérale de la résistance R_s et sa valeur numérique.

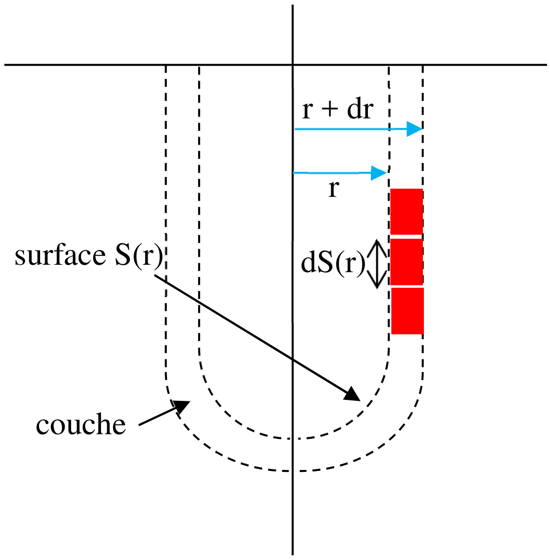
Données : une primitive de $\frac{1}{rL+r^2}$ est $-\frac{1}{L}\text{Ln}\frac{L+r}{r}$; L= 3 m ; ρ = 100 Ω.m^{-1} ; r_T = 1 cm

---

a-On a : $\boxed{R_b = \frac{\rho\ell}{S}}$

b-On découpe le sol en couches. Une couche élémentaire de résistance dR est comprise entre r et r + dr.
Toutes ces couches sont en série, donc :

$$R_s = \int_{r_T}^{+\infty} dR$$



Une couche élémentaire est formée par la mise en parallèle des petits volumes en rouge qui ont chacun pour résistance $\frac{\rho dr}{dS(r)}$ d'après la question a-.

Donc : $\frac{1}{dR} = \iint_{\text{surfaceS(r)}} \frac{dS(r)}{\rho dr} = \frac{S(r)}{\rho dr}$

Au final : $\boxed{R_s = \int_{r_T}^{+\infty} \frac{\rho dr}{S(r)}}$

c-On a : $\boxed{S(r) = 2\pi rL + 2\pi r^2}$

d- $R_s = \int_{r_T}^{+\infty} \frac{\rho dr}{2\pi(rL+r^2)} = \frac{\rho}{2\pi}\left[-\frac{1}{L}\text{Ln}\frac{L+r}{r}\right]_{r_T}^{+\infty} = \frac{\rho}{2\pi}\left[0+\frac{1}{L}\text{Ln}\frac{L+r_T}{r_T}\right]$

Donc : $\boxed{R_s = \frac{\rho}{2\pi L}\text{Ln}\frac{L+r_T}{r_T}}$

A.N : <u>R_s = 30,3 Ω</u>
