Analyse : Chapitre 7

Suites - limites

I Limite d'une suite réelle.

1) Limite finie :

a) Définition

Idée intuitive : dire qu'une suite (u_n) admet une limite ℓ doit signifier qu'on se rapproche aussi près qu'on veut de ℓ lorsque n est grand.
Traduction mathématique : quel que soit l'intervalle ouvert autour de ℓ, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont dans l'intervalle.

On utilise la définition avec quantificateur suivante :

Définition :

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que la suite (u_n) est **convergente** vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \underset{+\infty}{\to} \ell$.

b) Remarques

- Comme $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ équivaut à $-\varepsilon \leq u_n - \ell \leq \varepsilon$, ou encore à $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$, on peut donner une *seconde définition*, équivalente à la première :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$$

- Comme $|u_n - \ell| = |u_n - \ell - 0|$, on a immédiatement que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n\to+\infty} (u_n - \ell) = 0$$

- Contrairement à la limite de fonction (que l'on reverra plus tard), la limite d'une suite n'a de sens que quand $n \to +\infty$. On notera donc parfois $\lim u_n$ sans préciser "$n \to +\infty$" car il n'y a pas d'ambiguïté possible.
- Une suite qui n'admet pas de limite finie est dite **divergente**.

A noter : PRÉCISION SUR LE SIGNE

On dit que $\lim u_n = \ell^+$ si $\lim u_n = \ell$ et, à partir d'un certain rang, $u_n \geq \ell$.

De même, on dit que $\lim u_n = \ell^-$ si $\lim u_n = \ell$ et si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq \ell$.

On rencontre cela souvent pour des limites vers 0 (0^+ et 0^-). Par exemple $\lim \dfrac{1}{n} = 0^+$.

Attention, ℓ^+ et ℓ^- ne sont pas des nombres !!!! Ce sont des abréviations.

c) Théorème d'unicité :

Theorème 1 :

Soient ℓ et ℓ' dans $\mathbb{R}$.
Si (u_n) converge vers ℓ et vers ℓ', alors $\ell = \ell'$.
On dit que la limite d'une suite est "unique".

▷ *Preuve* :

◁

2) Limites infinies :

Définition :

On dit qu'une suite (u_n) réelle a pour limite $+\infty$ si et seulement si pour tout $A \in \mathbb{R}$, u_n est supérieure à A à partir d'un certain rang, autrement dit

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq A$$

On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
De même, on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ si et seulement si

A noter :

- Comme pour les limites finies, le théorème d'unicité est vérifié.
- Une suite qui "tend vers" $+\infty$ ou $-\infty$ n'est pas considérée comme convergente. On dit qu'elle "diverge" vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$).

3) Suites extraites

a) Définition

Définition :

Soit (u_n) une suite.
On appelle **suite extraite** de (u_n) toute suite de la forme

$$(u_{\varphi(n)}) \text{ avec } \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ strictement croissante.}$$

Exemples :

b) Limite et suites extraites

Proposition 1 :

Si (u_n) admet une limite (finie ou infinie), alors toutes les suites extraites admettent la même limite.

$\triangleright$ *Preuve* :

$\triangleleft$

Exemple :
Ce résultat s'utilise fréquemment dans sa version contraposée : si des suites extraites admettent des limites différentes, ou si une suite extraite n'en admet pas, alors (u_n) n'a pas de limite.
Soit par exemple $u_n = (-1)^n$.

c) Partionnement pair/impair :

Theorème 2 :
Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell \\ \text{et} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell \end{cases}$$

▷ *Preuve* :

◁

Remarque :
Ce théorème reste valable avec des limites infinies, avec une preuve similaire.

4) Et si les suites sont à valeurs complexes ?

- La définition de la limite finie est inchangée, à ceci près que la valeur absolue est remplacée par le module :

Définition :

On dit que la suite (u_n) est **convergente** vers une limite $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

De plus, on a le résultat suivant :

Propriété 1 :

Soit (u_n) une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$, alors

$$\lim u_n = \ell \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim Re(u_n) = Re(\ell) \\ \lim Im(u_n) = Im(\ell) \end{array} \right.$$

▷ *Preuve :*

◁

- La version avec encadrement de la suite n'est plus possible (pas d'ordre dans $\mathbb{C}$)
- La notion de limite infinie n'a pas de sens dans $\mathbb{C}$ (toujours à cause de l'absence d'ordre)
- Toutes les autres propriétés restent valables (unicité, suite extraite, etc.)

II Théorèmes généraux

1) Opérations sur les limites et formes indéterminées :

Notation

Dans les tableaux ci dessous, on note **F.I.** les "formes indéterminées".
Cela signifie qu'il n'y a pas de résultat vrai à chaque fois : tout peut se passer, de la limite finie à l'absence de limite.
Vous pourrez TOUJOURS déterminer ce qu'il se passe. Ainsi, "forme indéterminée" ne sera jamais une réponse à un calcul de limite....

Dans les tableaux qui suivent, (u_n) et (v_n) désignent des suites de nombres réels, ℓ et ℓ' sont des nombres réels.

Somme de limites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+v_n$					

Produit de limites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	0	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\times v_n$								

Quotient de limites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$\ell>0$ ou $=+\infty$	$\ell>0$ ou $=+\infty$	$\ell<0$ ou $=-\infty$	$\ell<0$ ou $=-\infty$	ℓ	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell'\neq 0$	0	0^+	0^-	0^+	0^-	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$									

Exemples de preuve :
Toutes ces formules se démontrent plus ou moins de la même façon. Par exemple pour la somme :

Au secours ! **Y'a trop de formules !**

Ces formules peuvent avant tout "se sentir", et n'ont pas forcément à être apprises par coeur.
Concentrez vous d'abord sur les formes indéterminées : savoir exactement les formes problématiques fait que vous pourrez "deviner" les autres intuitivement.

2) Limites et inégalités

a) Signe de la suite et signe de la limite

Theorème 3 :

Soit (u_n) une suite réelle convergente vers une limite $\ell \neq 0$, alors u_n est du signe de ℓ à partir d'un certain rang.

▷ *Preuve* :

◁

b) Passage à la limite dans une inégalité :

Corolaire 1 :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes vers ℓ et ℓ'.
Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$, alors $\ell \leq \ell'$.

▷ *Preuve* :

◁

Cas particulier d'application : suite majorée
Si on sait qu'une suite u_n converge et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq M,$$

alors on peut affirmer que

$$\lim u_n \leq M.$$

On dit qu'on “passe à la limite” dans l'inégalité.

Danger ! **INÉGALITÉS LARGES SEULEMENT !**

On ne travaille qu'avec des inégalités LARGES (c'est à dire $\leq$ ou $\geq$). Le théorème est faux avec des inégalités strictes (c'est à dire $<$ ou $>$).

Ainsi, si $u_n > M$ pour tout n, on n'a pas forcément $\lim u_n > M$.
Par exemple avec $u_n = \frac{1}{n}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, mais on n'a pas $\lim u_n > 0$.

A retenir : Lorsque l'on passe à la limite, les $<$ deviennent $\leq$ et les $>$ deviennent $\geq$.

c) Théorèmes d'encadrements (ou des gendarmes)

Theorème 4 :
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles. On suppose que à partir d'un certain rang,

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

Si $\lim u_n = \lim w_n = \ell \in \mathbb{R}$, alors (v_n) est convergente et $\lim v_n = \ell$.

▷ *Preuve* :

◁

Pour les limites infinies, un encadrement n'est pas nécessaire :

Theorème 5 : Divergence par majoration ou minoration

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que APCR, $u_n \leq v_n$.
Si $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$.
Si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim u_n = -\infty$

▷ *Preuve* : Même genre de preuve. ◁

Méthode : Produit par une suite bornée et utilisation du théorème des gendarmes

Le théorème d'encadrement permet de traiter rapidement certains cas avec un produit par une suite bornée :
Soit (u_n) une suite de la forme $u_n = a_n b_n$ avec (a_n) et (b_n) deux suites telles que $a_n \to 0$ et b_n bornée.

- On écrit que $|u_n| = |a_n||b_n|$,
- Comme (b_n) est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|b_n| \leq M$. On obtient alors l'encadrement :

$$0 \leq |u_n| \leq M|a_n|$$

- Comme $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to+\infty} M|a_n| \to 0$ aussi et le théorème d'encadrement permet de conclure que $|u_n| \to 0$, donc $u_n \to 0$.

Exemple :
Soit $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$.

d) Approximation par des nombres décimaux

Observation :
soit $x \in \mathbb{R}$.
On a déjà défini $\lfloor x \rfloor$ comme étant la partie entière de x, c'est à dire l'entier immédiatement précédent x.
Par exemple $\lfloor \pi \rfloor = 3$.
Mais par quelle formule peut-on obtenir le fameux $\pi \simeq 3,14$?

On peut prendre

De manière générale, si on veut n décimales, on va donc calculer

Proposition 2 :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Soit $r_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $s_n = r_n + \dfrac{1}{10^n}$
Alors les suites (r_n) et (s_n) convergent vers x.

▷ *Preuve* :

◁

Définition :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre r_n est appelé **approximation décimale par défaut** de x à la précision 10^{-n}, et s_n est appelé **approximation décimale par excès** de x à la précision 10^{-n}.

3) Suites bornées

a) Convergence et suites bornées

Theorème 6 :

Toute suite convergente est bornée.

▷ *Preuve* :

◁

b) Théorème de la limite monotone

Theorème 7 :

1. Toute suite réelle croissante et majorée converge vers sa borne supérieure.
2. Toute suite croissante non majorée diverge et a pour limite $+\infty$.

$\triangleright$ *Preuve* :

$\triangleleft$

Corolaire 2 :

1. Toute suite réelle décroissante et minorée converge vers sa borne inférieure.
2. Toute suite décroissante non minorée diverge et a pour limite $+\infty$.

$\triangleright$ *Preuve* : si (u_n) décroissante, alors $(-u_n)$ est croissante. On applique le théorème précédent à $(-u_n)$ et on montre donc sa convergence. $\triangleleft$

Remarque

En résumé : une suite monotone admet toujours une limite.
Si elle est croissante, cette limite est sa borne supérieure, éventuellement $+\infty$, si elle est décroissante, cette limite est la borne inférieure, éventuellement $-\infty$.

4) Méthode élémentaire de calcul de limite

a) Factorisation par le terme "le plus fort"

Pour des limites de suite du type $\dfrac{A_n}{B_n}$ où A_n et B_n sont des sommes de suites, une technique souvent efficace est de factoriser A_n et B_n par leurs termes "les plus forts" et d'appliquer les propriétés d'opérations sur les limites.

Exemple :

- $u_n = \dfrac{n^3 - n + 2}{5n^3 + n^2 - n - 1}$

- $u_n = \dfrac{3n^2 - n + 1}{\sin n + 4 - n^3}$.

b) Croissances comparées

Pour appliquer la technique de factorisation par le terme le plus fort, on peut utiliser les "croissances comparées". On les a déjà montré, mais on peut les rappeler ici :

Proposition 3 :

(i) puissances contre logarithme : $\forall \alpha > 0, \beta > 0, \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$

(ii) puissances contre géométrique : $\forall \alpha > 0, q > 1 \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^\alpha}{q^n} = 0$

(iii) Puissances contre factorielle : $\forall q > 1, \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{q^n}{n!}$

Exemple :

- $u_n = \dfrac{\sqrt{n} - (\ln n)^2}{\sqrt{n}}$.

III Etudes de convergence de suite

1) Convergence des suites usuelles

Proposition 4 :

1. Soit (u_n) une suite réelle arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}^*$. Alors $\lim u_n = +\infty$ si $r > 0$ et $\lim u_n = -\infty$ si $r < 0$.
2. Soit (u_n) est une suite géométrique réelle de raison $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, alors :
   - si $|q| < 1$, (u_n) converge et $\lim u_n = 0$.
   - si $q = 1$, (u_n) converge vers 1.
   - si $q > 1$, (u_n) diverge et $\lim u_n = +\infty$ ou $-\infty$ selon le signe de u_0.
   - si $q \leq -1$, (u_n) diverge sans limite.

▷ *Preuve* :

1. $u_n = u_0 + nr$, d'où l'affirmation.
2. On a $u_n = u_0 q^n$.
   Considérons la suite $v_n = q^n$ et posons $w_n = |v_n|$. On a $w_n = |q|^n$.
   Traitons tous les cas possibles sur q :

◁

Remarques :
Dans le cas suite complexe :

- Une suite arithmétique de raison non nulle, complexe non réelle diverge toujours, sans limite.
- Une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$ converge vers 0 si $|q| < 1$. Elle est stationnaire si $q = 1$ et diverge dans tous les autres cas, sans limite.

2) Suites adjacentes

a) Définition :

Définition :

Deux suites (a_n) et (b_n) réelles sont dites adjacentes si et seulement si l'une est croissante, l'autre décroissante et $\lim(b_n - a_n) = 0$

Theorème 8 :

Si deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, alors elles convergent et ont même limite.

▷ *Preuve* :

◁

b) Exemple : La somme exponentielle

Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $T_n = S_n + \dfrac{1}{n}$. Montrons que (S_n) et (T_n) sont adjacentes.

3) Retour sur les suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue

Soit f une fonction continue sur un intervalle I fermé, éventuellement infini, tel que $f(I) \subset I$ (on dit que I est stable par f).

Soit (u_n) une suite définie par $\begin{cases} u_0 & \in I \\ u_{n+1} & = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

On sait déjà (cf chapitre précédent) que la suite est bien définie : en effet, si $u_n \in I$, alors $f(u_n) \in f(I) \subset I$, donc $u_{n+1} = f(u_n) \in I$ et la suite sera toujours définie.

a) Points fixes

Proposition 5 :

Si f est continue en un point a (c'est à dire $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, alors pour toute suite tel que $\lim u_n = a$, $\lim f(u_n) = f(a)$

▷ *Preuve* : cf chapitre sur la continuité, à venir.... ◁

Reprenons notre suite vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue.

Proposition 6 :

Si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ, alors ℓ est un **point fixe** de f, c'est à dire que $f(\ell) = \ell$.

▷ *Preuve* :

◁

b) Exemples d'études

Grandes lignes de la méthode (reprise et suite de la fin du chapitre 6 !

Etape 1 : on étudie la fonction f en cherchant les points suivants :

1. Tableau de variation
2. Intervalles stables par f. (ie vérifiant $f(I) \subset I$)
3. Point fixe de f en étudiant le signe et les zeros de g définie par $v_n = f(x) - x$.

Etape 2 : discuter en fonction de u_0 le comportement de la suite, en cherchant les points suivants :

1. Est-elle bornée ?
2. Est-elle monotone ?

Etape 3 : conclure avec les théorèmes de croissance monotone et en reliant aux points fixes.

Exemples :

(u_n) définie par $u_0 > -6$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$