ESPACES PROBABILISÉS

Cours

I. Rappels sur les espaces probabilisés finis

Définition 1

- On appelle *expérience aléatoire* une expérience qui, reproduite dans des conditions identiques, peut conduire à des résultats différents non prévisibles à l'avance.
- On appelle *univers* l'ensemble des résultats observables - ou issues possibles - d'une expérience aléatoire.

- On utilise habituellement les notations Ω pour l'univers et ω pour l'un de ses éléments.
- En première année, vous n'avez étudié que le cas où l'univers Ω est un ensemble *fini*.
  Exemple : On lance un dé à 6 faces. On choisit dans ce cas comme univers $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Définition 2

On appelle *événement* un fait attaché à l'expérience aléatoire dont on peut dire suivant le résultat observé s'il s'est réalisé ou non. On identifie un événement avec l'ensemble des issues pour lesquelles il se réalise. Un événement est donc aussi une partie de l'univers Ω.

Exemple : Soit A l'événement « Obtenir un chiffre pair ». On a $A = \{2,4,6\}$.

- Les opérations sur les événements correspondent à des opérations sur les parties de Ω.
  On utilise un vocabulaire spécifique aux événements (*cf* page suivante).

- Un événement est une partie de Ω.
  Réciproquement, *lorsque* Ω *est fini*, on considère que toute partie de Ω est un événement. L'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ des parties de Ω désigne donc l'ensemble des événements.

- On veut définir une application P qui à chaque événement associe sa probabilité.

  Exemple : Avec un dé équilibré, si l'on réalise un très grand nombre de lancers alors la fréquence d'apparition de l'événement A se rapproche de $\frac{1}{2}$. On estime alors que cet événement a une chance sur deux de se réaliser ce qui conduit à poser $P(A) = \frac{1}{2}$.
  Si l'on choisit de donner comme probabilité à un événement la valeur limite vers laquelle se stabilise sa fréquence d'apparition lorsque l'on réalise un très grand nombre de fois l'expérience, on peut constater que l'on associe à chaque événement un nombre compris entre 0 et 1, que l'événement certain Ω a pour probabilité 1 et que la propriété d'additivité est respectée. Cela conduit à poser la définition suivante.

Vocabulaire probabiliste	Vocabulaire ensembliste
Événement certain C'est l'événement Ω, il se réalise toujours	Ensemble Ω
Événément impossible C'est l'événement $\varnothing$, il ne se réalise jamais	Ensemble vide $\varnothing$
Événement élémentaire C'est un événement qui ne se réalise que pour une seule issue	Singleton C'est un ensemble à un seul élément $\{\omega\}$ avec $\omega \in \Omega$
Événement contraire de A $\overline{A}$ se réalise si et seulement si A ne se réalise pas	Complémentaire de A dans Ω ${}^cA = \complement_\Omega A = \Omega \setminus A$
Événement A et B $A \cap B$ se réalise si et seulement si A se réalise et B se réalise	Intersection de A et B $A \cap B = \{\omega \in \Omega,\ \omega \in A \text{ et } \omega \in B\}$
Événement A ou B $A \cup B$ se réalise si et seulement A se réalise ou B se réalise	Réunion ou union de A ou B $A \cup B = \{\omega \in \Omega,\ \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$
Événément A_1 et A_2 et $\cdots$ A_n $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ se réalise si et seulement si tous les A_i se réalisent	Intersection finie $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{\omega \in \Omega \ / \ \forall i \in [\![1,n]\!],\ \omega \in A_i\}$
Événément A_1 ou A_2 ou $\cdots$ A_n $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ se réalise si et seulement si l'un au moins des A_i se réalise	Union finie $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{\omega \in \Omega \ / \ \exists i \in [\![1,n]\!],\ \omega \in A_i\}$
A implique B Si A se réalise alors B se réalise	Inclusion $A \subset B$ Si $\omega \in A$ alors $\omega \in B$
Événements incompatibles Ce sont deux événements qui ne peuvent pas se réaliser simultanément	Ensembles disjoints Ce sont deux ensembles A et B tels que $A \cap B = \varnothing$
Système complet fini d'événements $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ À chaque expérience, un et un seul des A_i se réalise	Partition finie de Ω $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ et pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$

Définition 3

Soit Ω un ensemble fini.

- On appelle *probabilité* sur Ω toute application $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ vérifiant :
  $\boxed{1}$ $P(\Omega) = 1$,
  $\boxed{2}$ *Additivité :* $\forall (A,B) \in \left(\mathscr{P}(\Omega)\right)^2$ vérifiant $A \cap B = \varnothing$, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Pour $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on dit alors que $P(A)$ est *la probabilité de l'événement* A.

On rappelle le cas particulier de la probabilité uniforme, utilisée en cas de situation équiprobable.

Définition/Proposition 4

- Deux événements sont dits *équiprobables* lorsqu'ils ont la même probabilité.
- Il y a *équiprobabilité* lorsque tous les événements élémentaires sont équiprobables.
- Soit Ω un ensemble fini.
  Il existe une unique probabilité P sur Ω telle qu'il y ait équiprobabilité.
  Elle est appelée *la probabilité uniforme* et elle vérifie pour tout événement A :

$$P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables (c'est-à-dire où } A \text{ se réalise)}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Dans le cas général, on peut définir une probabilité sur un ensemble fini en définissant la probabilité de chaque événément élémentaire.

Proposition 5

On suppose que $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ où $N \in \mathbb{N}^*$.

Si $p_1, p_2, \ldots, p_N$ sont N nombres réels positifs vérifiant $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$ alors il existe une unique probabilité P sur Ω telle que pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, $P(\{\omega_i\}) = p_i$.

Définition 6

Soit Ω un ensemble fini. Soit P une probabilité sur Ω.
On dit que $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ est un *espace probabilisé fini.*

On dispose d'un cadre théorique pour étudier une expérience aléatoire avec un univers fini :

$$(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$$

où :
⋆ Ω désigne l'univers,
⋆ $\mathscr{P}(\Omega)$ représente l'ensemble des événements considérés,
⋆ P désigne la probabilité choisie.

C'est une *modélisation* de l'expérience aléatoire.

Exemple 1 : On lance à trois reprises une pièce équilibrée.
Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux *face* ?

Exemple 2 : Une urne contient 5 boules blanches et 10 boules noires.

1. On tire au hasard successivement et avec remise 2 boules de l'urne.
   Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche et une boule noire dans cet ordre ?
   Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche et une boule noire dans un ordre quelconque ?
2. Mêmes questions dans le cas de tirages sans remise.
3. On tire simultanément 5 boules de l'urne.
   Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules blanches et 3 boules noires ?

II. Cas général

On cherche désormais à modéliser une expérience aléatoire d'univers Ω non néssairement fini.

Exemples :

- On lance un dé à six faces et on s'arrête lorsqu'on obtient 6.
  On choisit de représenter l'expérience par le nombre de lancers effectués, on considère comme univers $\Omega = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, $+\infty$ désignant le cas où on n'obtient jamais 6 (Ω est dénombrable).
- On s'intéresse à la durée de vie d'un atome radioactif.
  On choisit dans ce cas comme univers $\Omega = [0, +\infty[$ (Ω n'est pas dénombrable).

A. Tribu

Lorsque Ω est un ensemble fini, on modélise l'expérience aléatoire en considérant que l'ensemble des événements étudiés est $\mathscr{P}(\Omega)$. Lorsque Ω est un ensemble infini non dénombrable, l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ est « trop gros » et construire une probabilité $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, 1]$ pose des problèmes théoriques.
On va se contenter de définir la probabilité sur un sous-ensemble de $\mathscr{P}(\Omega)$, qui sera l'ensemble des événements étudiés.

Comment définir un tel sous-ensemble ? Il paraît raisonnable de considérer que l'ensemble vide et l'univers sont des événements et on aimerait obtenir encore un événément lorsqu'on réalise les opérations usuelles vues p.2. On sera aussi amené à considérer des unions et des intersections dénombrables d'événements.

Définition 7

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'événements.

- $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est l'événement qui se réalise lorsque l'un au moins des A_n se réalise.
  En termes ensemblistes, pour $\omega \in \Omega$: $\omega \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\omega \in A_n$.
- $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est l'événement qui se réalise lorsque tous les A_n se réalisent.
  En termes ensemblistes, pour $\omega \in \Omega$: $\omega \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\,,\ \omega \in A_n$.

- On peut aussi noter $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$.
- On notera que la distributivité et les lois de Morgan, connues pour les unions et intersections finies, sont encore vraies avec les unions et intersections dénombrables.
  Si B est un événement, on a :
  $$B \cap \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=0}^{+\infty}(B \cap A_n) \text{ et } B \cup \left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \bigcap_{n=0}^{+\infty}(B \cup A_n).$$
  On a :
  $$\overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n} \text{ et } \overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}.$$

Exemple 3 : On lance une pièce équilibrée une infinité de fois.

1. Déterminer l'univers de cette expérience aléatoire. Est-il dénombrable ?
2. Soit A : « On n'obtient que des *face* » et B : « On obtient au moins une fois *pile* ».
   Exprimer A et B en fonction des événements F_k : « On obtient *face* au k-ème lancer » $(k \in \mathbb{N}^*)$.

On décide alors de modéliser l'ensemble des événements considérés par une *tribu*, voici la définition.

Définition 8

Soit Ω un ensemble. Soit $\mathscr{A}$ un sous-ensemble de $\mathscr{P}(\Omega)$.
On dit que $\mathscr{A}$ est une *tribu* sur Ω lorsque :

- $\Omega \in \mathscr{A}$,
- $\mathscr{A}$ est stable par passage au complémentaire : pour tout $A \in \mathscr{A}$, on a $\overline{A} \in \mathscr{A}$,
- $\mathscr{A}$ est stable par union dénombrable :
  pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$, on a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$.

Exemples : Soit Ω un ensemble.

- $\mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu.
- $\{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu.
- Si A est un sous-ensemble de Ω alors $\{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}$ est une tribu.
  Elle est appelée *la tribu engendrée par A*.

Proposition 9

Soit Ω un ensemble et $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω.

- $\varnothing \in \mathscr{A}$
- $\mathscr{A}$ est stable par union, intersection, différence et différence symétrique :
  pour tout $(A, B) \in \mathscr{A}^2$, on a $A \cup B \in \mathscr{A}$, $A \cap B \in \mathscr{A}$, $A \setminus B \in \mathscr{A}$ et $A \Delta B \in \mathscr{A}$.
- $\mathscr{A}$ est stable par union finie et intersection finie :
  pour toute famille finie $(A_1, \ldots, A_n)$ d'éléments de $\mathscr{A}$, on a $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}$ et $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}$.
- $\mathscr{A}$ est stable par intersection dénombrable :
  pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$, on a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$.

Définition 10

Soit Ω un ensemble. Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω.
On dit que $(\Omega, \mathscr{A})$ est un *espace probabilisable.*

B. Probabilité

1. Définitions

Définition 11

Soit Ω un ensemble et $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω.

- On appelle *probabilité* sur $(\Omega, \mathscr{A})$ toute application $P : \mathscr{A} \to [0,1]$ vérifiant :

  $\boxed{1}$ $P(\Omega) = 1$,

  $\boxed{2}$ *σ-additivité :* pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} P(A_n)$ converge et on a $P\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.

- Pour $A \in \mathscr{A}$, on dit que $P(A)$ est *la probabilité de l'événement A.*

Définition 12

Soit Ω un ensemble, $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω et P une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.
On dit que $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un *espace probabilisé.*

$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est une modélisation de l'expérience aléatoire étudiée où :
⋆ l'ensemble Ω désigne l'univers,
⋆ la tribu $\mathscr{A}$ représente l'ensemble des événements considérés,
⋆ P est la probabilité choisie.

Si Ω est au plus dénombrable, on choisit habituellement $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ et on peut définir P à partir des probabilités des événements élémentaires.

Proposition 13

On suppose que Ω est un ensemble dénombrable : $\Omega = \{\omega_n, n \in \mathbb{N}\}$.
Si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels positifs telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n$ converge et a pour somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$ alors il existe une unique probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(\{\omega_n\}) = p_n$.

Dans la plupart des cas, on ne déterminera explicitement ni l'univers, ni la probabilité, ni la tribu. On supposera juste qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ modélisant l'expérience aléatoire et dans lequel on peut mener les calculs souhaités.

Dans toute la suite, on suppose fixé un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Définition 14

- Soit A un événement.
  Lorsque $P(A) = 0$, on dit que A est un *événement négligeable.*
  Lorsque $P(A) = 1$, on dit que A est un *événement presque-sûr.*
- On appelle *propriété vraie presque sûrement* et on note en abrégé *ps* toute propriété qui est vérifiée sur un ensemble de probabilité 1.

- Ces notions dépendent de la probabilité P. On note parfois P-*ps*.
- Attention, un événement peut être de probabilité nulle sans être l'événement impossible $\varnothing$ ou être de probabilité 1 sans être l'événement certain Ω.

Exemple 3 (suite) : Exprimer B en fonction des événements A_k : « On obtient *pile* pour la première fois au k-ème lancer » $(k \in \mathbb{N}^*)$ et en déduire $P(B)$.

2. Propriétés de calculs

Proposition 15

Soit A et B deux événements.

- On a $P(\varnothing) = 0$.
- *Croissance :* Si $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$.
- On a $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- On a $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Proposition 16 (*Probabilité d'une union finie*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A_1, \dots, A_n$ n événements.

- *Cas particulier $n = 2$:*
$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$
- *Additivité :*
  Si les $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont deux à deux incompatibles alors $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.
- *Sous-additivité :* On a $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Proposition 17 (*Probabilité d'une union dénombrable*)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.

- *σ-additivité :*
  Si les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux incompatibles alors la série $\sum_{n\geqslant 0} P(A_n)$ converge et on a :
$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$
- *Propriété de la continuité croissante :*
  Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$ alors $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.
- On a $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right)$.
- *Sous-additivité :* On a $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ (on peut avoir $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$).

Proposition 18 (*Probabilité d'une intersection dénombrable*)

- *Propriété de la continuité décroissante :*
  Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$ alors $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.
- On a $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{i=0}^{n} A_i\right)$.

Exemple 4 : On lance un dé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement « Avant le n-ème lancer, on a obtenu 4 au moins une fois ».
On note A l'événement « Le 4 sort au moins une fois ».
Exprimer A en fonction des événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer $P(A)$.

III. Probabilités conditionnelles et indépendance

A. Probabilités conditionnelles

1. Définition

Définition/Proposition 19

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit A un événement tel que $P(A) \neq 0$.

- Pour tout événement B, on note :

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.$$

  L'application $P_A : \mathscr{A} \to [0,1]$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.
- Pour $B \in \mathscr{A}$, $P_A(B)$ est appelée *la probabilité conditionnelle de B sachant A.*

- On rencontre parfois les notations $P(B|A)$ et $P(B/A)$ à la place de $P_A(B)$.
- Comme une probabilité conditionnelle est une probabilité, toutes les propriétés vues pour les probabilités sont encore vraies avec des probabilités conditionnelles.
- Lorsque P est la probabilité uniforme, on a pour tous événements A et B avec $P(A) \neq 0$:

$$P_A(B) = \frac{\frac{\mathrm{Card}(B\cap A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}}{\frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}} = \frac{\mathrm{Card}(B \cap A)}{\mathrm{Card}(A)} = \frac{\text{nombre de cas favorables à } B \cap A}{\text{nombre de cas possibles pour } A}.$$

  On peut voir cette formule comme un changement d'ensemble de référence.

2. Propriétés

a) Formule des probabilités composées

Les deux résultats suivants permettent de calculer la probabilité de l'intersection d'un nombre fini d'événements.

Proposition 20

Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.
On a :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B).$$

Dans le cas où $P(A) = 0$ alors $P(A \cap B) = 0$ (à prouver).

Par convention, on pose alors $P(A) \times P_A(B) = 0$ (même si $P_A(B)$ n'existe pas).
Avec cette convention, la formule $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ est valable pour tout couple (A, B) d'événements.

Théorème 21 (*Formule des probabilités composées*)

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Soit $A_1, \dots, A_n$ n événements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$.
On a :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

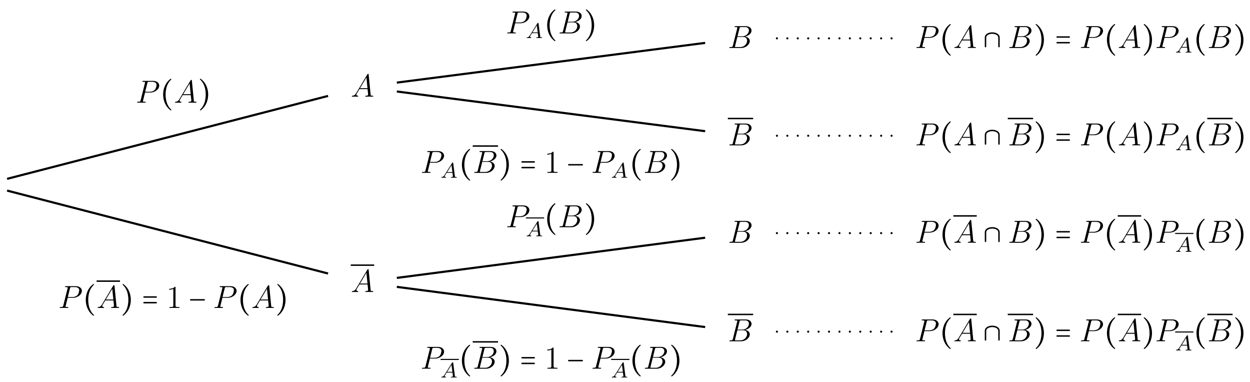
Exemple 5 : Une urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires.
On tire successivement et sans remise 3 boules dans cette urne.
Quelle est la probabilité d'obtenir la première boule blanche au troisième tirage ?
On proposera deux méthodes.

b) Formule des probabilités totales

Proposition 22

Soit A et B deux événements.
On a : $$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B).$$

- On utilise la même convention que précédemment.
- On peut représenter cette situation à l'aide d'un arbre probabiliste.



On obtient alors $P(B)$ en additionnant les quantités se trouvant au bout des branches finissant par B.

Exemple 6 : Une chaîne de Markov
Soit $(\alpha, \beta) \in]0,1[^2$.
Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Chaque personne peut transmettre l'information qu'elle a reçue fidèlement ou la transformer en son contraire. Lorsqu'une personne reçoit la bonne information, elle la transmet fidèlement avec la probabilité α et lorsqu'une personne ne reçoit pas la bonne information, elle la transforme en son contraire avec la probabilité $1 - \beta$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement « l'information après n transmissions est correcte ».
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(\overline{A_n}) \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.
2. Montrer que M est diagonalisable et la diagonaliser.
3. En déduire une expression de $P(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ce résultat se généralise à tout système complet ou quasi-complet d'événements.

Définition 23 (*Système complet dénombrable d'événements*)

On appelle *système complet d'événements* toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements telle que quelle que soit l'issue de l'expérience aléatoire, un et un seul des A_n est réalisé.
En d'autres termes, un système complet d'événements est une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles et d'union Ω c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall (n,m)\in\mathbb{N}^2 \text{ avec } n\neq m,\ A_n\cap A_m=\varnothing \quad\text{et}\quad \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n=\Omega.$$

Définition 24 (*Système quasi-complet d'événements*)

On appelle *système quasi-complet d'événements* toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements vérifiant :

$$\forall (n,m)\in\mathbb{N}^2 \text{ avec } n\neq m,\ A_n\cap A_m=\varnothing \quad\text{et}\quad \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)=1.$$

On notera qu'un système complet d'événements est un système quasi-complet d'événements.

Théorème 25 (*Formule des probabilités totales*)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet ou quasi-complet d'événements.
Pour tout événement B, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} P(B\cap A_n)$ converge et on a :

$$P(B)=\sum_{n=0}^{+\infty} P(B\cap A_n)=\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)\times P_{A_n}(B).$$

- La formule des probabilités totales est également vraie avec un système complet fini d'événements (avec des sommes finies).
- En pratique, la des probabilités totales s'utilise pour une expérience aléatoire se déroulant en deux étapes, la seconde étape dépendant de la première.
  À la première étape, un et un seul des A_n est réalisé. À la seconde étape, B est réalisé ou non.
  Cette formule permet alors de calculer la probabilité de B (étape 2).

Exemple 7 : On dispose d'une pièce équilibrée et d'une urne contenant une boule blanche.
On suppose que l'on dispose également d'un stock infini de boules noires.
On lance la pièce jusqu'à obtenir Face.
S'il a fallu n lancers pour obtenir Face ($n\in\mathbb{N}^*$), on rajoute $n!-1$ boules noires dans l'urne.
On tire alors une boule dans cette urne.
Déterminer la probabilité d'obtenir la boule blanche.

c) Formule de Bayes

Proposition 26

Soit A et B deux événements avec $P(B) \neq 0$.
On a :

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}.$$

Si l'on ne connaît pas $P(B)$, on peut la déterminer par la formule des probabilités totales.

Théorème 27 (*Formule de Bayes*)

- Si A et B sont deux événements avec $P(B) \neq 0$, on a :

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)}.$$

- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet ou quasi-complet d'événements.
Soit B un événement de probabilité non nulle.
On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P_B(A_n) = \frac{P(A_n) \times P_{A_n}(B)}{\sum_{m=0}^{+\infty} P(A_m) \times P_{A_m}(B)}.$$

La formule de Bayes s'utilise également pour une expérience aléatoire se déroulant en deux étapes.
Elle est également appelée *formule de probabilité des causes*.
Connaissant la conséquence (événement B - étape 2), elle permet de calculer la probabilité d'une cause (événement A_n - étape 1) (ordre antichronologique).

Exemple 7 (suite) : On obtient une boule noire.
Quelle est la probabilité d'avoir fait 10 lancers de la pièce ?

B. Indépendance

1. Indépendance de deux événements

Définition 28

Soit A et B deux événements.
On dit que les événements A et B sont *indépendants (pour la probabilité P)* lorsque

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Notons que la notion d'indépendance dépend de la probabilité.

Proposition 29

- Soit A un événement tel que $P(A) \neq 0$. Soit B un événement.
  Alors A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.
- Soit A un événement tel que $P(A) = 0$.
  Alors A est indépendant de tout autre événement.

Intuitivement, deux événements A et B de probabilités non nulles sont indépendants lorsque la réalisation d'un de ces événements ne donne pas d'information sur la réalisation de l'autre.

- Attention à ne pas confondre deux événements *incompatibles* (qui ne peuvent pas se réaliser en même temps) et deux événements *indépendants* (la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation de l'autre).
- Certaines situations donnent naturellement lieu à des événements indépendants (on lance plusieurs fois une pièce / on effectue des tirages successifs avec remise).
  Attention, des tirages successifs sans remise ne donnent pas des événements indépendants.

Proposition 30

Si les événements A et B sont indépendants alors les événements A et $\overline{B}$, les événements $\overline{A}$ et B et les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

2. Indépendance d'une famille finie d'événements

Définition 31

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Soit $A_1, \dots, A_n$ n événements.
On dit que les $A_1, \dots, A_n$ sont *indépendants (pour la probabilité P)* lorsque pour tout sous-ensemble J non vide de $[\![1, n]\!]$, $P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i)$.

- L'indépendance implique l'indépendance deux à deux mais la réciproque est fausse pour $n \geqslant 3$.
- L'indépendance est conservée lorsque l'on remplace un nombre fini d'événements par leur événement contraire.
- Certaines situations donnent naturellement lieu à des événements indépendants (on lance une pièce un nombre fini de fois / on effectue un nombre fini de tirages avec remise).

On retiendra les formules permettant de calculer la probabilité d'une intersection finie d'événements :

Proposition 32 (*Probabilité d'une intersection finie*)

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Soit $A_1, \dots, A_n$ n événements.

- *Formule des probabilités composées* :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

- Si les événements $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants alors :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Exemple 8 : Étant donnés des événements indépendants A_i où $i \in [\![1, n]\!]$, montrer que la probabilité pour qu'aucun des A_i ne soit réalisé est au plus égale à : $\exp\left(-\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\right)$.