ESPACES PROBABILISÉS

Exercices

1 On souhaite montrer que toute partie infinie A de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
On pose $x_0 = \min(A)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \min(A \setminus \{x_0, \dots, x_n\})$.
Soit alors $f : \mathbb{N} \to A$, qui à tout $n \in \mathbb{N}$ associe $f(n) = x_n$.

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que f est strictement croissante et surjective.
3. Conclure.

---

2 On souhaite montrer que $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.
Raisonnons par l'absurde : on suppose que l'on peut écrire $\mathscr{P}(\mathbb{N}) = \{A_n,\, n \in \mathbb{N}\}$.
En considérant l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \notin A_n\}$, montrer une absurdité. Conclure.

3
1. Calculer $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{i+j}{i!j!}$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

---

4 Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour avoir au moins une chance sur deux d'obtenir un six ?

---

5 On tire au hasard, successivement et sans remise, 6 lettres du mot « ANAGRAMME ».
On considère le mot formé par les lettres obtenus dans l'ordre où elles apparaissent.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir le mot « GRAMME » ?
2. Même question en supposant qu'il y a remise après tirage d'une lettre.

---

6 Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.
On organise un tirage au sort entre n équipes de football de 1ère division et n équipes de 2ème division (chaque équipe joue un match et un seul).

1. Calculer la probabilité p_n que tous les matchs opposent une équipe de 1ère division à une équipe de 2ème division.
2. Calculer la probabilité q_n que tous les matchs opposent deux équipes de la même division.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{2^{2n-1}}{n} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant 2^{2n}$.
4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n$.

---

7 Soit $\mathscr{T}$ une tribu sur un ensemble Ω et Ω' une partie de Ω.
Montrer que $\mathscr{T}' = \{A \cap \Omega' \mid A \in \mathscr{T}\}$ définit une tribu sur Ω'.

$\boxed{8}$ Soit $\Omega = [0,1]$.
On suppose qu'il existe une tribu $\mathscr{A}$ sur Ω contenant tous les segments $[a,b]$ avec $0 \leqslant a < b \leqslant 1$.

1. Montrer que $\mathscr{A}$ contient tous les intervalles ouverts $]a,b[$ avec $0 \leqslant a < b \leqslant 1$ et tous les singletons $\{\alpha\}$ avec $\alpha \in [0,1]$.
2. On suppose que $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un espace probabilisé tel que si $0 \leqslant a < b \leqslant 1$ alors $P([a,b]) = b-a$. Déterminer $P(]a,b[)$ pour $0 \leqslant a < b \leqslant 1$ et $P(\{\alpha\})$ avec $\alpha \in [0,1]$.

$\boxed{9}$ On effectue une suite infinie de lancers d'un dé.
Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note A_i l'événement « On obtient un six au $i$ème lancer ».

1. Définir par une phrase ne comportant aucun vocabulaire mathématique chacun des événements :
$$E_1 = \bigcap_{i=4}^{+\infty} A_i, \quad E_2 = \left(\bigcap_{i=1}^{3} \overline{A_i}\right) \cap \left(\bigcap_{i=4}^{+\infty} A_i\right), \quad E_3 = \bigcup_{i>3} A_i.$$
2. Écrire à l'aide des A_i l'événement « On obtient au moins une fois six au-delà du $n$ème lancer ».
3. On pose $C_n = \bigcup_{i>n} A_i$. Montrer que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
Caractériser d'une phrase ne comportant pas de vocabulaire mathématique l'événement $C = \bigcap_{n\geqslant 1} C_n$.
4. Écrire à l'aide des A_i les événements :
$$B_n = \{\text{On n'obtient plus que des six à partir d'un } n\text{ème lancer}\}$$
$$B = \{\text{On n'obtient plus que des six à partir d'un certain lancer}\}$$

$\boxed{10}$ *Formule de Poincaré* ou *formule du crible*
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Soit $A_1, \ldots, A_n$ n événements d'un espace probabilisé.
Montrer qu'on a :
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})\right).$$

$\boxed{11}$ Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Montrer que $\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$.

$\boxed{12}$ Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant : si la boule blanche est tirée, le jeu s'arrête, et si une boule noire est tirée, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, deux boules noires.
On note A l'événement « le jeu s'arrête ».
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement « les n premiers tirages amènent une boule noire ».

1. Exprimer A en fonction des événements A_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_n) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \dfrac{1}{2k}\right)$.
3. Déterminer $P(A)$.

$\boxed{13}$ Un rat se trouve dans un labyrinthe face à quatre portes dont une seule conduit à la sortie. Chaque fois qu'il choisit une mauvaise porte, le rat reçoit une légère décharge électrique et revient à son point de départ. On s'intéresse au nombre d'essais utilisés pour trouver la bonne porte, en envisageant successivement trois hypothèses :

1. Le rat a une mémoire parfaite. À chaque nouvel essai, il évite toutes les mauvaises portes choisies précédemment et choisit au hasard parmi les autres.
2. Le rat a une mémoire immédiate. À chaque nouvel essai, il évite la mauvaise porte de l'essai précédent et choisit au hasard parmi les trois autres.
3. Le rat n'a pas de mémoire. Il choisit à chaque essai de façon équiprobable l'une des portes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « Le rat trouve la bonne porte en n essais ».
Déterminer $P(B_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$\boxed{14}$ Anaïs et Benjamin lancent à tour de rôle le même dé cubique parfait.
Anaïs joue en premier. Le vainqueur est le premier qui obtient un 6.
On considère les événements A « Anaïs gagne la partie », B « Benjamin gagne la partie » et pour $n \in \mathbb{N}^*$, F_n « la partie se termine au $n$ème lancer ».

1. Exprimer A et B à l'aide des F_n.
2. Calculer la probabilité de l'événement F_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire la probabilité de A et de B.
4. Soit D l'événement « Il n'y a pas de vainqueur ».
   Quelle est sa probabilité ? Est-ce l'événement impossible ?

$\boxed{15}$ On tire au hasard un nombre entier strictement positif.
On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient n avec la probabilité $\frac{1}{2^n}$.

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note A_k l'événement « l'entier tiré est un multiple de k. »
   Donner la probabilité de A_k pour $k \in \mathbb{N}^*$ et celle de $A_2 \cup A_3$.
3. On note B l'événement « l'entier tiré est un nombre premier ».
   Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de B.

$\boxed{16}$ Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient des boules indiscernables au toucher, blanches et noires.
La proportion de boules blanches est p ($p \in]0,1[$) et la proportion de boules noires est $q = 1 - p$.
On effectue une infinité de tirages avec remise.
On note A l'événement « Les tirages ne donnent pas r boules blanches ».
On cherche à déterminer $P(A)$.
Pour $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on note :
$H_{n,k}$=« tous les tirages du n-ème au $(n+k)$-ème donnent des boules noires »,
H_n=« tous les tirages à partir du n-ème donnent des noires »,
H=« il existe un lancer à partir duquel on n'obtient que des noires ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une égalité d'événements entre H_n et les $H_{n,k}$ pour $k \in \mathbb{N}$.
   En déduire la probabilité de l'événement H_n.
2. Déterminer une égalité d'événements entre H et les H_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   En déduire la probabilité de l'événement H.
3. Déterminer la probabilité de l'événement A.

$\boxed{17}$ On considère deux jetons J_1, et J_2 équilibrés.
Le jeton J_1 possède une face numérotée 0 et une face numérotée 1 et le jeton J_2 possède deux faces numérotées 1. Un joueur choisit au hasard un jeton puis effectue une série de lancers avec ce jeton.
On note E l'événement « le jeton J_1 est choisi pour le jeu » et, pour tout entier naturel k non nul, U_k l'événement « le k-ième lancer fait apparaître une face numérotée 1 ».

1. Déterminer la probabilité que le joueur obtienne n fois ($n \in \mathbb{N}^*$) une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers.
2. Dans cette question, on suppose que le joueur a obtenu n fois ($n \in \mathbb{N}^*$) une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers.
   Quelle est la probabilité qu'il ait joué avec le jeton J_1 ?

$\boxed{18}$ On considère une particule se déplaçant à chaque seconde sur l'un des trois sommets A, B, C d'un triangle selon le procédé suivant :
Si la particule se trouve en B, elle y reste. Si la particule se trouve en A, elle se rend la seconde suivante sur l'un des trois sommets de façon équiprobable. Si la particule se trouve en C, à la seconde suivante, elle y reste une fois sur trois, sinon elle va en B sept fois plus souvent qu'en A.
On suppose qu'initialement, la particule se situe de façon équiprobable sur l'un des trois sommets.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n (resp. B_n et C_n) l'événement « la particule se trouve à la $n$ème seconde en A (resp. B et C) » et on note a_n (resp. b_n et c_n) la probabilité de A_n (resp. B_n et C_n).

1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
   Déterminer $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. Montrer que A est diagonalisable.
3. Déterminer a_n, b_n et c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{19}$ Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Deux joueurs A et B s'affrontent en des parties indépendantes. Le joueur A dispose d'une fortune égale à n euros tandis que le joueur B dispose de $N-n$ euros. À chaque tour, le joueur A a la probabilité $p \in]0,1[$ de l'emporter et le joueur B a la probabilité complémentaire $q = 1-p$. Le joueur perdant cède alors un euro au vainqueur. Le jeu continue jusqu'à la ruine d'un des deux joueurs.
On note a_n la probabilité que le joueur A l'emporte lorsque sa fortune initiale vaut n.

1. Que valent a_0 et a_N ? Établir la formule de récurrence : $\forall n \in [\![1, N-1]\!]$, $a_n = pa_{n+1} + qa_{n-1}$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{1\leqslant n\leqslant N-1}$ définie par $u_n = a_n - a_{n-1}$ est géométrique.
3. Calculer a_n en distinguant les cas $p = q$ et $p \neq q$.
4. Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement.

$\boxed{20}$ *Loi du 0-1*
Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'événements définis sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. On suppose que la série $\sum_{n\geqslant 1} P(A_n)$ converge.
   Montrer que $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) = 0$. Interpréter ce résultat.
2. On suppose que les événements A_n sont mutuellement indépendants et que la série $\sum_{n\geqslant 1} P(A_n)$ diverge. Montrer que $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) = 1$. Interpréter ce résultat.