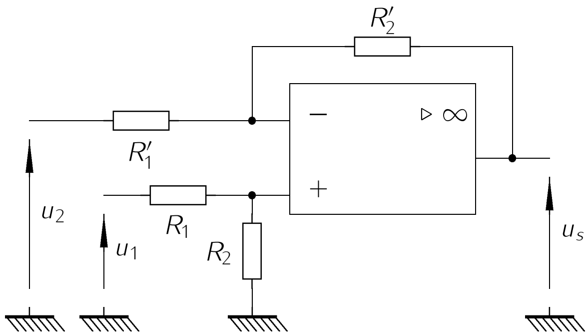
Travaux Dirigés EC_4

Exercice 1 : Circuit soustracteur

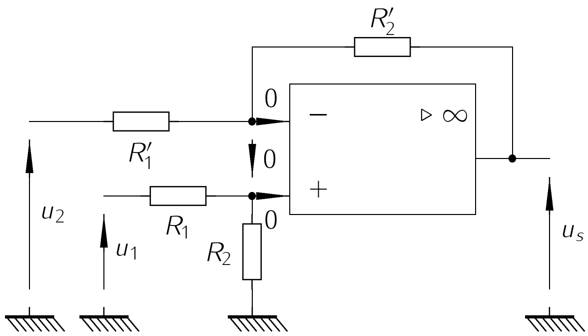
On considère le circuit ci-dessous dans lequel l'AO. est idéal et fonctionne en régime linéaire.



1. Déterminer l'expression de u_s en fonction de u_1, u_2 et des résistances R_1, R_2, R_1' et R_2'.
2. Comment faut-il choisir les résistances pour que $u_s = u_1 - u_2$, justifiant ainsi le nom de circuit soustracteur ?

Par hypothèse, l'amplificateur opérationnel est idéal donc $I_- = I_+ = 0$.
De plus, comme il fonctionne en régime linéaire (la présence d'une rétroaction négative le confirme) on a aussi $v_+ - v_- = \varepsilon = 0$.

On complète alors la figure.

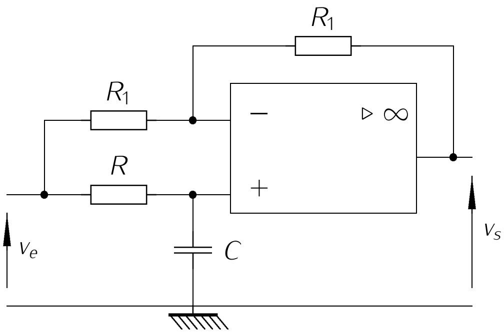


1. On cherche à exprimer u_s en fonction de u_1, u_2 et des résistances R_1, R_2, R_1' et R_2'.
   Pour cela, on applique la loi des nœuds en terme de potentiels (ou directement le théorème de Millman) :
   - à l'entrée inverseuse :
   $$\frac{u_2 - v_-}{R_1'} - I_- + \frac{u_s - v_-}{R_2'} = 0 \Rightarrow v_- = \frac{\frac{u_2}{R_1'} + \frac{u_s}{R_2'} - 0}{\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'}} \Rightarrow v_- = \frac{R_2' u_2 + R_1' u_s}{R_2' + R_1'}$$
   - à l'entrée non inverseuse :
   $$\frac{u_1 - v_+}{R_1} - I_+ + \frac{0 - v_+}{R_2} = 0 \Rightarrow v_+ = \frac{\frac{u_1}{R_1} + \frac{0}{R_2} - 0}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \Rightarrow v_+ = \frac{R_2 u_1}{R_2 + R_1}$$

   On utilise ensuite $\varepsilon = 0 = v_+ - v_- \Rightarrow v_+ = v_-$ soit
   $$\frac{R_2 u_1}{R_2 + R_1} = \frac{R_2' u_2 + R_1' u_s}{R_2' + R_1'} \Rightarrow u_s = \frac{R_2(R_1' + R_2')u_1 - (R_1 + R_2)R_2' u_2}{R_1'(R_1 + R_2)} = \frac{R_2(R_1' + R_2')}{R_1'(R_1 + R_2)}u_1 - \frac{R_2'}{R_1'}u_2$$
2. On aura $u_s = u_1 - u_2$ si $\frac{R_2(R_1'+R_2')}{R_1'(R_1+R_2)} = 1$ et $\frac{R_2'}{R_1'} = 1 \Rightarrow R_2' = R_1'$ d'où
   $\frac{R_2(R_1'+R_1')}{R_1'(R_1+R_2)} = 1 \Rightarrow 2R_2.R_1' = R_1'(R_1 + R_2) \Rightarrow R_1 = R_2$.
   Finalement, il faut et il suffit que $R_1 = R_2$ et $R_1' = R_2'$.

Exercice 2 : Montage en régime sinusoïdal

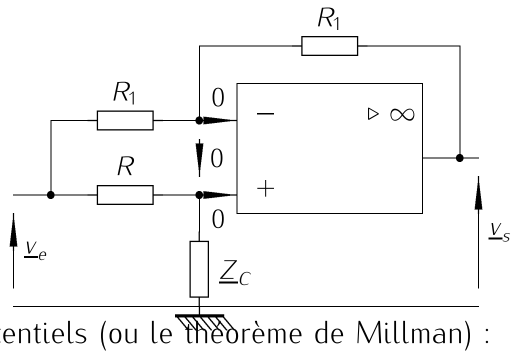
On considère le montage suivant alimenté par un générateur de tension alternative sinusoïdale, $v_e(t) = E\sqrt{2}\cos\omega t$. L'amplificateur opérationnel est idéal, R est une résistance variable.



1. Déterminer l'expression complexe de la tension de sortie $\underline{v}_s$ en fonction de $\underline{v}_e$ et des données.
   En déduire sa valeur efficace et son déphasage φ par rapport à v_e.
2. Quel rôle joue ce montage ?

Par hypothèse, l'amplificateur opérationnel est idéal donc $I_- = I_+ = 0$.
De plus, comme il fonctionne en régime linéaire (la présence d'une rétroaction négative le confirme) on a aussi en notation complexe $\underline{v}_+ - \underline{v}_- = \underline{\varepsilon} = 0$.

On complète alors le schéma du circuit en notation complexe.



1. On cherche à exprimer $\underline{v}_s$ en fonction de $\underline{v}_e$.
   Pour cela, on applique la loi des nœuds en terme de potentiels (ou le théorème de Millman) :
   - à l'entrée inverseuse :

$$\frac{\underline{v}_e - \underline{v}-}{R_1} - I_- + \frac{\underline{v}_s - \underline{v}_-}{R_1} = 0 \Rightarrow \underline{v}_- = \frac{\frac{\underline{v}_e}{R_1} + \frac{\underline{v}_s}{R_1} - 0}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1}} \Rightarrow \underline{v}_- = \frac{\underline{v}_e + \underline{v}_s}{2}$$

   - à l'entrée non inverseuse :

$$\frac{\underline{v}_e - \underline{v}_+}{R} - I_+ + \frac{0 - \underline{v}_+}{\underline{Z}_C} = 0 \Rightarrow \underline{v}_+ = \frac{\frac{\underline{v}_e}{R} + \frac{0}{\underline{Z}_C} - 0}{\frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{Z}_C}} \Rightarrow \underline{v}_+ = \frac{\underline{v}_e}{1 + jRC\omega} \qquad \text{pont div de tension}$$

   On utilise ensuite $\underline{\varepsilon} = 0 = \underline{v}_+ - \underline{v}_- \Rightarrow \underline{v}_+ = \underline{v}_-$ soit

$$\frac{\underline{v}_e + \underline{v}_s}{2} = \frac{\underline{v}_e}{1 + jRC\omega} \Rightarrow \underline{v}_e + jRC\omega\underline{v}_e + (1 + jRC\omega)\underline{v}_s = 2\underline{v}_e \Rightarrow \underline{v}_s = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}\underline{v}_e$$

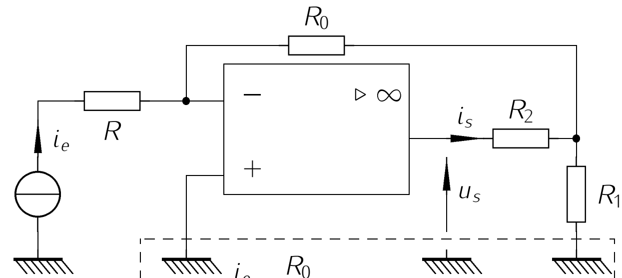
   En posant $\underline{v}_e = E\sqrt{2}e^{j\omega t}$ et $\underline{v}_s = \underline{V}_s\sqrt{2}e^{j\omega t}$, on en déduit (après simplification par $\sqrt{2}e^{j\omega t}$) la valeur efficace complexe $\underline{V}_s$ de la tension de sortie

$$\underline{V}_s = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}E \Rightarrow V_s = |\underline{V}_s| = \frac{|1 - jRC\omega|}{|1 + jRC\omega|}E = \frac{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}E = E$$

   et $\varphi = \arg(\underline{V}_s) = \arg(1 - jRC\omega) - \arg(1 + jRC\omega) = -\arctan\frac{RC\omega}{1} - \arctan\frac{RC\omega}{1}$ soit finalement $\varphi = -2\arctan RC\omega$
2. Ce montage est un montage déphaseur.

Exercice 3 : Amplificateur de courant.

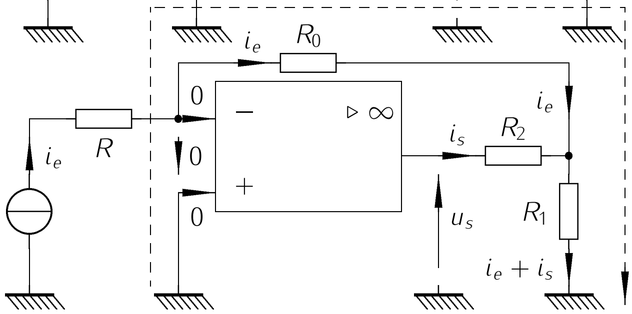
On considère le circuit ci-dessous dans lequel l'AO. est idéal et fonctionne en régime linéaire.



Déterminer, en fonction des résistances, le gain en courant $G_i = \frac{i_s}{i_e}$.

Par hypothèse, l'amplificateur opérationnel est idéal donc $I_- = I_+ = 0$.
De plus, comme il fonctionne en régime linéaire (la présence d'une rétroaction négative le confirme) on a aussi $v_+ - v_- = \varepsilon = 0$.

On complète alors la figure.

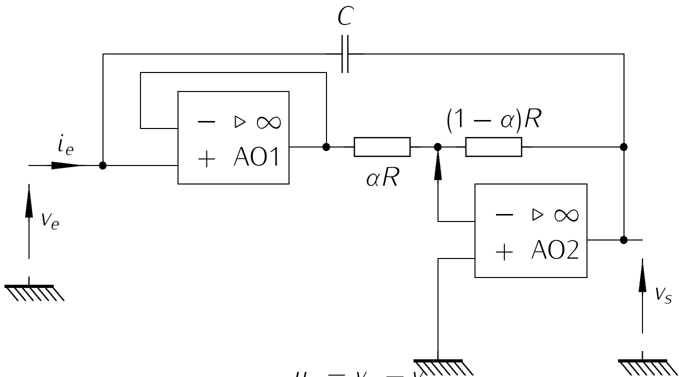


Par application d'une simple loi des mailles (celle représentée en pointillés), on en déduit ensuite

$$0 - R_0 i_e - R_1(i_e + i_s) = 0 \Rightarrow i_e(R_0 + R_1) = -R_1 i_s \Rightarrow G_i = \frac{i_s}{i_e} = -(1 + \frac{R_0}{R_1})$$

Exercice 4 : Loi des nœuds et Théorème de Millman en RSF

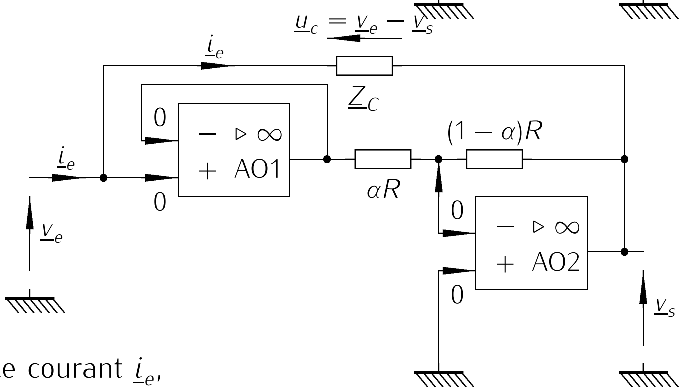
Dans le circuit ci-contre, le curseur partage la résistance R en deux parties αR et $(1-\alpha)R$ avec $0 \leq \alpha \leq 1$.
Les amplificateurs opérationnels sont idéaux et fonctionnent en régime linéaire.



1. Calculer le rapport $\frac{\underline{v}_e}{\underline{i}_e}$ en régime sinusoïdal forcé.
2. Quel est l'intérêt de ce montage ?

Par hypothèse, les amplificateurs opérationnels sont idéaux donc $I_- = I_+ = 0$.
De plus, comme ils fonctionnent en régime linéaire (la présence de rétroactions négatives le confirme) on a aussi en notation complexe $\underline{v}_+ - \underline{v}_- = \underline{\varepsilon} = 0$.

On complète alors le schéma du circuit en notation complexe.



1. Comme l'impédance $\underline{Z}_C$ est parcourue par le courant $\underline{i}_e$, en convention récepteur, on peut écrire $\underline{i}_e = \frac{\underline{u}_c}{\underline{Z}_C} = jC\omega(\underline{v}_e - \underline{v}_s)$.
   Par construction, le potentiel de l'entrée non inverseuse de l'AO2, relié à la masse, est nul. On a donc également $\underline{v}_- = 0$ pour l'AO2.
   L'AO1 étant un suiveur, on retrouve le potentiel $\underline{v}_e$ à sa sortie et par application de la loi des nœuds en terme de potentiels (ou le théorème de Millman) à l'entrée inverseuse de l'AO2 on obtient :
   $$\frac{\underline{v}_e - \underline{v}_-}{\alpha R} + \frac{\underline{v}_s - \underline{v}_-}{(1-\alpha)R} = 0 \Rightarrow \underline{v}_s = \frac{\alpha - 1}{\alpha}\underline{v}_e$$

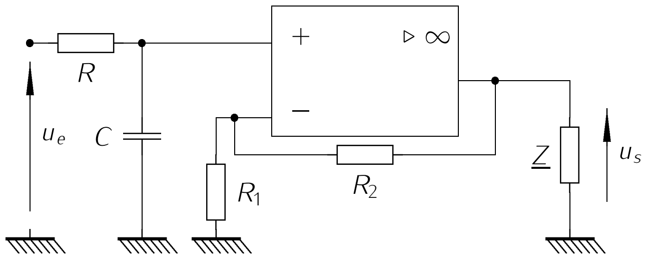
et en reportant dans l'expression de $\underline{i}_e$, on en déduit

$$\underline{i}_e = jC\omega\left(\underline{v}_e - \frac{\alpha-1}{\alpha}\underline{v}_e\right) = \frac{jC\omega}{\alpha}\underline{v}_e \Rightarrow \frac{\underline{v}_e}{\underline{i}_e} = \underline{Z}_e = \frac{\alpha}{jC\omega} = \frac{1}{j\frac{C}{\alpha}\omega} = \frac{1}{jC'\omega} \qquad \text{avec } C' = \frac{C}{\alpha} > C$$

2. On remarque que le montage est équivalent à un condensateur de capacité $C' > C$, il peut donc être utilisé comme multiplieur de capacité.
   Par exemple en prenant $\alpha = 0{,}1$, on multiplie la capacité du condensateur par 10 !

Exercice 5 : **Filtre actif**

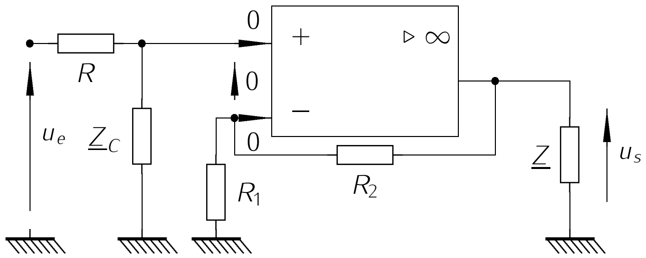
Soit le filtre représenté ci-dessous et pour lequel $R = 100\ \Omega$, $C = 10\ \mu\text{F}$, $R_1 = 1\ \text{k}\Omega$, $R_2 = 9\ \text{k}\Omega$ et l'amplificateur opérationnel est parfait et fonctionne en régime linéaire.



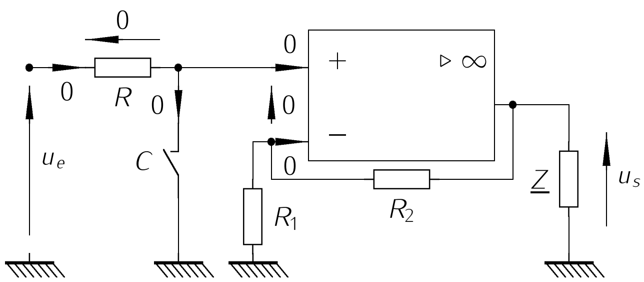
1. Quelle est la nature du filtre.
2. Vérifier en déterminant la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$.
   Faire une remarque sur l'influence de $\underline{Z}$, l'impédance de charge. Utilité ?
3. Quelle est la fréquence de coupure ?
4. Tracer le diagramme de BODE du filtre.

Par hypothèse, l'amplificateur opérationnel est idéal donc $I_- = I_+ = 0$.
De plus, comme il fonctionne en régime linéaire (la présence d'une rétroaction négative le confirme) on a aussi $v_+ - v_- = \varepsilon = 0$.

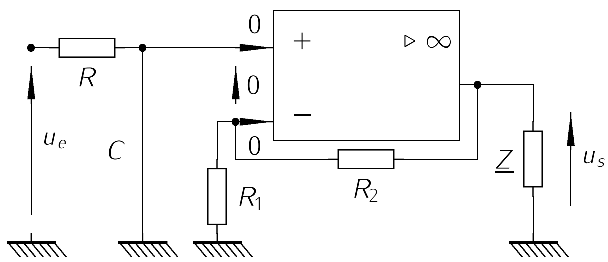
On complète alors la figure.



1. Avec un peu d'habitude, on reconnaît tout de suite un filtre passe bas du premier ordre (circuit RC avec C en sortie ouverte) de fonction de transfert $\underline{H}_1$ suivi d'un amplificateur de tension non inverseur de facteur d'amplification $A = 1 + \frac{R_2}{R_1}$ quelque soit la fréquence d'où un comportement passe-bas du premier ordre.
   On peut également représenter le circuit équivalent en basses fréquences (C se comporte comme un interrupteur ouvert) et en hautes fréquences (C se comporte comme un interrupteur fermé).



Montage en Basses fréquences



Montage en Hautes fréquences

   En basses fréquences, on a $v_+ = u_e$ alors que $v_+ = 0$ en hautes fréquences.
   Pour les deux montages, comme R_1 et R_2 sont traversées par le même courant, l'utilisation de la formule des ponts diviseurs de tension donne $v_- = \frac{R_1}{R_1+R_2}u_s \Rightarrow u_s = (1 + \frac{R_2}{R_1})v_-$.
   Remarque : on pouvait aussi obtenir ce résultat par utilisation de la loi des nœuds en terme de potentiel à l'entrée inverseuse (Cf. 2.).
   Enfin, comme $v_- = v_+$, on a $u_s = (1+\frac{R_2}{R_1})v_+ = (1+\frac{R_2}{R_1})u_e$ en basses fréquences et $u_s = (1+\frac{R_2}{R_1})v_+ = 0$ en hautes fréquences d'où un comportement passe bas (du premier ordre).

2. Comme l'amplificateur opérationnel est idéal, $I_+ = 0$ donc R et le condensateur d'impédance complexe $\underline{Z}_C$ sont traversés par le même courant d'où

$$\underline{v}_+ = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + R}\underline{u}_e = \frac{\underline{u}_e}{1 + R.\underline{Y}_C} \Rightarrow \underline{v}_+ = \frac{\underline{u}_e}{1 + jRC\omega}$$

Par application de la loi des nœuds en terme de potentiel à l'entrée inverseuse,

$$\frac{0 - \underline{v}_-}{R_1} + \frac{\underline{u}_s - \underline{v}_-}{R_2} = 0 \Rightarrow \underline{v}_- = \frac{\frac{0}{R_1} + \frac{\underline{u}_s}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{\underline{u}_s}{\frac{R_2}{R_1} + 1}$$

On utilise enfin

$$\underline{v}_+ = \underline{v}_- \Rightarrow \frac{\underline{u}_e}{1 + jRC\omega} = \frac{\underline{u}_s}{\frac{R_2}{R_1} + 1} \Rightarrow \underline{H} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\frac{R_2}{R_1} + 1}{1 + jRC\omega} = A.\underline{H}_{PB}$$

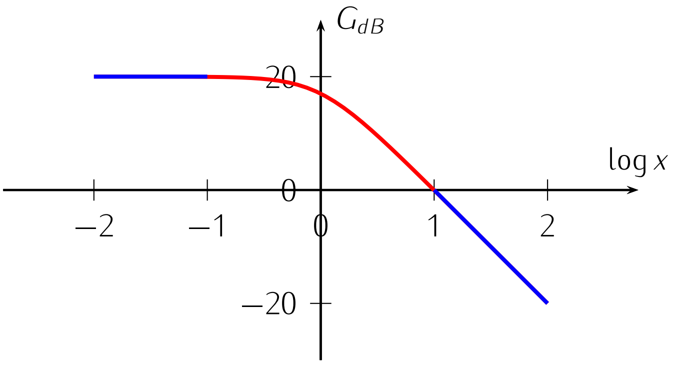
avec $A = 1 + \frac{R_2}{R_1}$ le facteur d'amplification de l'amplificateur non inverseur et $\underline{H}_{PB}$ la fonction de transfert du filtre passe bas du premier ordre que constitue la portion RC avec C en sortie ouverte.

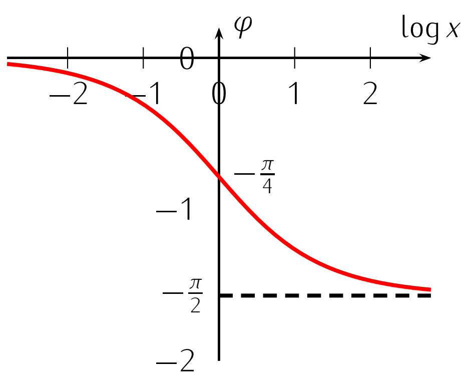
On remarque que $\underline{H}$ ne dépend pas de l'impédance de charge. Ce ne serait pas le cas sans la présence de l'amplificateur de tension. On aurait alors $\underline{H} = \frac{\underline{Z}_{\text{éq}}}{R + \underline{Z}_{\text{éq}}}$ avec $\underline{Z}_{\text{éq}}$ est l'impédance équivalente à l'association parallèle $\underline{Z}$ et $\underline{Z}_C$.
L'amplificateur de tension permet d'avoir un gain statique important et en plus de garder le filtre $R\ C$ en sortie ouverte.

3. La fréquence de coupure est f_0 telle que

$$|\underline{H}(f_0)| = \frac{|\underline{H}_{\max}|}{\sqrt{2}} = \frac{A}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{A}{\sqrt{1 + (RC\omega_0)^2}} = \frac{A}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{RC} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

4. Les applications numériques donnent $\omega_0 = 10^3$ rad.s^{-1}, $f_0 = 159$ Hz et $A = 10$.
On pose $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation propre pour mettre $\underline{H}$ sous la forme canonique $\underline{H} = \frac{A}{1+jx}$.
Pour tracer le diagramme de Bode, on commence par rappeler le comportement asymptotique :
   - pour $x \ll 1$ (basses fréquences), $\underline{H} \simeq A$ d'où $G_{dB} = 20\log(|\underline{H}|) \simeq 20\log A = 20$ dB et $\varphi = \arg(\underline{H}) \simeq 0$
   - pour $x = 1$ (à la pulsation de coupure), $\underline{H} = \frac{A}{1+j}$ d'où $G_{dB} = G_{dB,max} - 3 = 17$ dB et $\varphi = \arg(A) - \arg(1+j) = -\frac{\pi}{4}$.
   - pour $x \gg 1$ (hautes fréquences), $\underline{H} \simeq \frac{A}{jx} = -j\frac{A}{x}$ d'où $G_{dB} \simeq 20\log A - 20\log x$ (asymptote de -20 dB/décade) et $\varphi \simeq -\frac{\pi}{2}$.

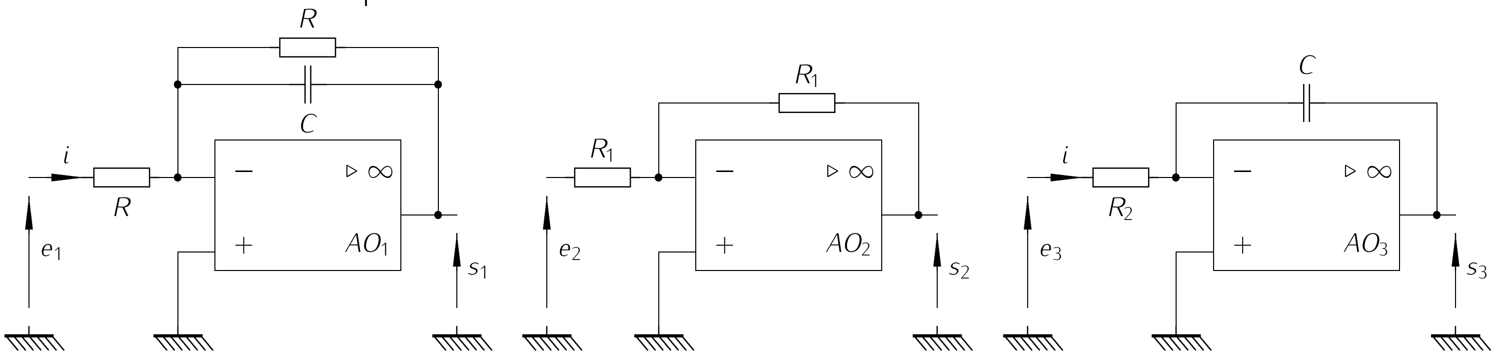




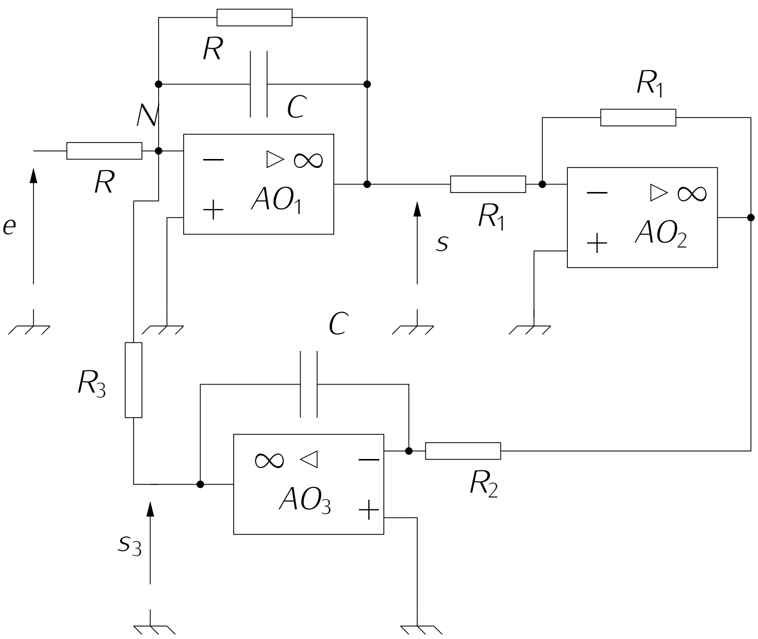
Exercice 6 : Filtre passe bande

Les amplificateurs (AO.) utilisés sont idéaux.

1. Calculer les fonctions de transfert des 3 circuits représentés figure 1 alimentés par une tension sinusoïdale de pulsation ω.



2. Les trois circuits sont associés suivant le schéma représenté figure 2 :



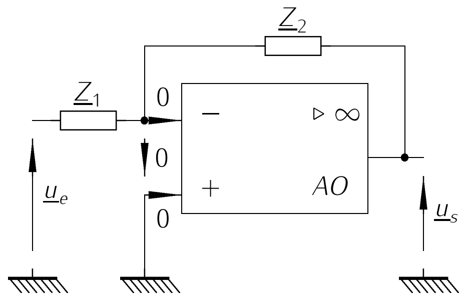
Calculer la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$. Montrer qu'elle est de la forme :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{-H_0}{1 + j\omega a + \frac{b}{j\omega}}$$

où H_0, a et b font intervenir les éléments constitutifs du circuit.

Quelle est la nature du filtre obtenu ?

1. Pour chacun de ces trois montages élémentaires, l'amplificateur opérationnel utilisé est idéal donc $I_- = I_+ = 0$.



De plus on note la présence d'une rétroaction négative ce qui laisse supposer qu'on travaille en mode linéaire d'où $\underline{v}_+ - \underline{v}_- = \underline{\varepsilon} = 0$.

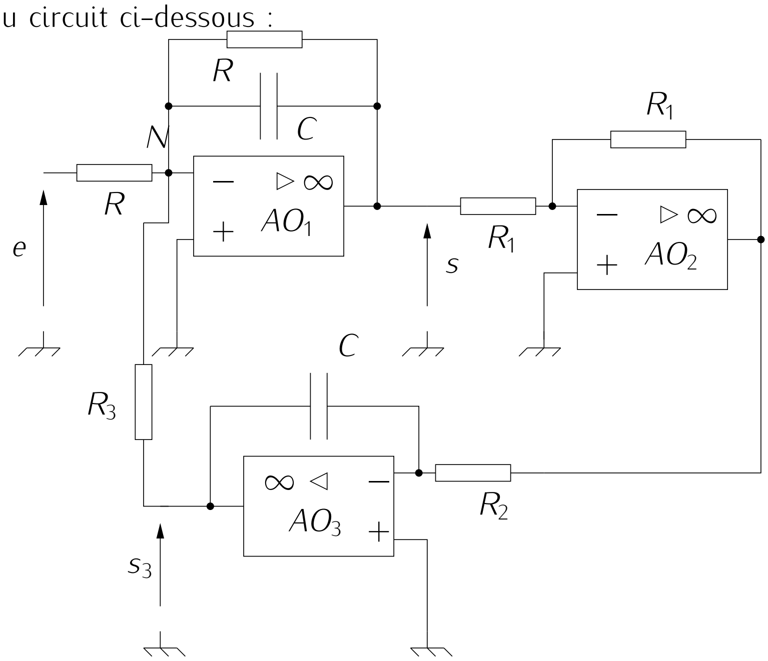
Par ailleurs, ces trois montages peuvent se mettre sous la forme représentée ci contre.

Par construction, $\underline{v}_+ = 0$ et par utilisation de la loi des nœuds en termes de potentiels ou directement du théorème de Millman à l'entrée inverseuse, on établit :

$$\frac{\underline{u}_e - \underline{v}_-}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{u}_s - \underline{v}_-}{\underline{Z}_2} - I_- = 0 \Rightarrow \underline{v}_- = \frac{\underline{Y}_1\underline{u}_e + \underline{Y}_2\underline{u}_s}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} = \underline{v}_+ = 0 \Rightarrow \underline{u}_s = -\frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_2}\underline{u}_e = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}\underline{u}_e$$

- Circuit 1 : $\underline{Z}_1 = R$ et $\underline{Y}_2 = \frac{1}{R} + jC\omega$ d'où $\underline{s}_1 = -\frac{1}{\underline{Z}_1\underline{Y}_2}\underline{e}_1 \Rightarrow \frac{\underline{s}_1}{\underline{e}_1} = \frac{-1}{1+jRC\omega}$: circuit passe bas du premier ordre.
- Circuit 2 : $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = R_1$ d'où $\underline{s}_2 = -\frac{R_1}{R_1}\underline{e}_2 \Rightarrow \frac{\underline{s}_2}{\underline{e}_2} = -1$: circuit suiveur inverseur.
- Circuit 3 : $\underline{Z}_1 = R_2$ et $\underline{Y}_2 = jC\omega$ d'où $\underline{s}_3 = -\frac{1}{\underline{Z}_1\underline{Y}_2}\underline{e}_3 \Rightarrow \frac{\underline{s}_3}{\underline{e}_3} = \frac{-1}{jRC\omega}$: circuit intégrateur inverseur.

2. Fonction de transfert du circuit ci-dessous :



Par application de la loi des nœuds en terme de potentiels (ou directement le théorème de Millman) en N, on établit :

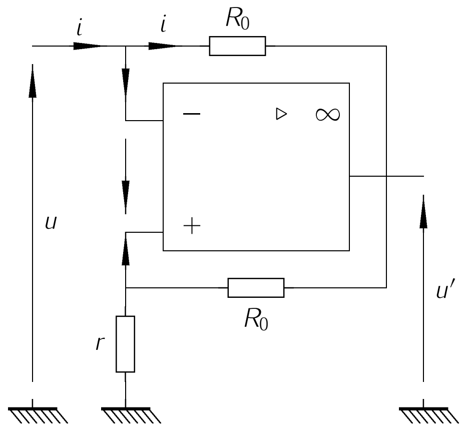
$$\frac{\underline{e} - \underline{v}_N}{R} + \frac{\underline{s} - \underline{v}_N}{R} + \frac{\underline{s} - \underline{v}_N}{\underline{Z}_C} - I_- + \frac{\underline{s}_3 - \underline{v}_N}{R_3} = 0 \Rightarrow \underline{v}_N = \frac{\frac{\underline{e}}{R} + \frac{\underline{s}}{R} + jC\omega\underline{s} + \frac{\underline{s}_3}{R_3}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{R_3}}$$

Or, par construction, $\underline{v}_+ = 0 = \underline{v}_- = \underline{v}_N$ d'où $\frac{\underline{e}}{R} + \frac{\underline{s}}{R} + jC\omega\underline{s} + \frac{\underline{s}_3}{R_3} = 0$ avec, d'après les résultats de la question précédente, $\underline{s}_3 = -\frac{1}{jR_2C\omega}\underline{e}_3$ et $\underline{e}_3 = -\underline{s}$ d'où $\underline{s}_3 = \frac{\underline{s}}{jR_2C\omega}$ et en reportant dans l'équation précédente, on en déduit :

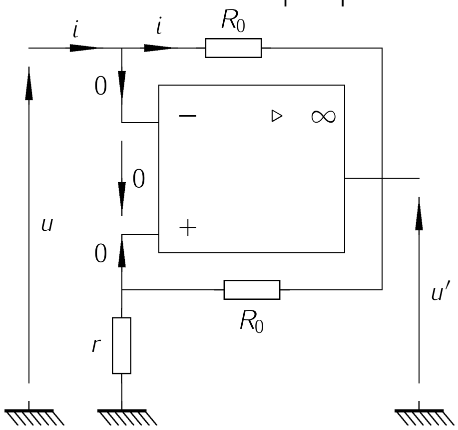
$$\frac{\underline{e}}{R} + \underline{s}\left[\frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{jR_2R_3\omega}\right] = 0 \Rightarrow \underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{-1}{1 + jRC\omega - \frac{jR}{R_2R_3C\omega}} = \frac{-H_0}{1 + j\omega a + \frac{b}{j\omega}}$$

où $H_0 = 1$, $a = RC$ et $b\frac{R}{R_2R_3C}$.
On remarque que le numérateur de $|\underline{H}|$ tend vers l'infini pour ω tend vers 0 ou ∞ alors que le numérateur reste constant. Il s'agit donc d'un filtre passe bande.

Exercice 7 : Amplificateur opérationnel et résistance



On cherche la relation liant u et i (convention récepteur). Commenter le résultat. À quoi peut servir ce montage ?



On a $u = v_- = v_+$.
r et R_0 étant traversés par le même courant, on a affaire à un diviseur de tension et

$$v_+ = \frac{r}{r+R_0}u' \iff u' = u + \frac{R_0}{r}u$$

Enfin, une loi des mailles donne $u - R_0 i - v_s = 0$ d'où
$u - R_0 i - u - \frac{R_0}{r}u = 0$ soit

$$u = -ri$$

- ⋆ Résistances d'entrée : $R_e = \frac{u}{i} = -r$.
- ⋆ Utilité : permet de diminuer la résistance totale R_T dans un RLC série par exemple pour obtenir un oscillateur harmonique ($Q = \frac{L\omega_0}{R_T} \to \infty$) qui produira un signal sinusoïdal de pulsation ω_0.