ELM0 Analyse vectorielle

I Champs et opérateurs

Un champ scalaire est une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Par exemple le champ de température T(M).

Un champ vectoriel est une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Par exemple le champ électrique $\overrightarrow{E}(M)$.

Un opérateur est une fonction transformant un champ en un autre champ.

On a déjà vu deux exemples : le gradient $\overrightarrow{\text{grad}}$ et l'opérateur $\left(\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)$.

Soit $V(M)$ un champ scalaire. Le gradient est un opérateur qui transforme un champ scalaire en un champ vectoriel $\overrightarrow{\text{grad}}\,(V)$.

L'opérateur $\left(\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)$ (par exemple $\overrightarrow{F} = \left(\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right) \overrightarrow{E}$) transforme un champ vectoriel en un autre champ vectoriel.

On introduit l'opérateur nabla $\overrightarrow{\nabla}$. C'est un vecteur sympbolique dont les composantes **en cartésiennes uniquement** sont $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}$.

$$\overrightarrow{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{e}_z$$

Cet opérateur permet de retrouver facilement les expressions des opérateurs en **coordonnées cartésiennes**.

Par exemple $\overrightarrow{\text{grad}}\,(V) = \nabla V$.

II Divergence

II.1 Définition

C'est un opérateur qui à un champ vectoriel $\overrightarrow{A}$ associe un champ scalaire noté $\text{div}\left(\overrightarrow{A}\right)$ et qui vérifie la propriété suivante :

Soit un volume élémentaire $\mathrm{d}\tau$, limité par une surface $\mathrm{d}\Sigma$ le flux élémentaire de $\overrightarrow{A}$ à travers $\mathrm{d}\Sigma$ est égal à $\text{div}\left(\overrightarrow{A}\right)\mathrm{d}\tau$.

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{d}\Sigma} = \text{div}\left(\overrightarrow{A}\right)\mathrm{d}\tau$$

On en déduit par analyse dimensionnelle que $\dim\left(\text{div}\left(\overrightarrow{A}\right)\right) = \dfrac{\dim(A)}{L}$.

II.2 Expressions

II.2.1 Coordonnéés cartésiennes

$\text{div}\left(\overrightarrow{A}\right) = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$.

C'est bien cohérent avec l'analyse dimensionnelle faite plus haut.

II.2.2 Autres systèmes de coordonnées

Les expressions seront données dans les énoncés.
Dans certains cas on le calculera sans s'en apercevoir !

II.2.3 Avec l'opérateur ∇

$\text{div}\left(\overrightarrow{A}\right) = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A}$.

II.3 Théorème de Green-Ostrogradsky

On considère cette fois un volume fini, limité par une surface Σ. Le flux sortant de $\overrightarrow{A}$ à travers Σ, surface fermée, est égal à l'intégrale volumique de la divergence de $\overrightarrow{A}$.

$$\oiint_{\Sigma} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div}\left(\overrightarrow{A}\right) \mathrm{d}\tau$$

II.4 Champ à flux conservatif

Le champ $\overrightarrow{A}$ est à flux conservatif si le flux de $\overrightarrow{A}$ à travers n'importe quelle surface fermée Σ est nul.

D'après le théorème précédent cela implique que pour tout volume $\mathcal{V}$ l'intégrale volumique de la divergence de $\overrightarrow{A}$ est nul, ce qui implique la nullité de la divergence de $\overrightarrow{A}$!

$\overrightarrow{A}$ est à flux conservatif $\Leftrightarrow$ $\text{div}\left(\overrightarrow{A}\right) = 0$.

C'est la formulation **locale** locale du caractère conservatif du flux d'un champ vectoriel.

III Rotationnel

III.1 Définition

C'est un opérateur qui à un champ vectoriel associe un autre champ vectoriel et qui vérifie la propriété suivante.

Soit $\overrightarrow{A}$ un champ vectoriel et un contour fermé élémentaire $\mathrm{d}\Gamma$. La circulation élémentaire de $\overrightarrow{A}$ le long de ce contour élémentaire fermé est égale au produit scalaire entre le rotationnel de $\overrightarrow{A}$ et le vecteur surface élémentaire associé au contour.

$$\mathrm{d}\mathcal{C}_{\mathrm{d}\Gamma} = \overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{A}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

L'analyse dimensionnelle montre que le rotationnel de $\overrightarrow{A}$ a pour dimension celle de $\overrightarrow{A}$ sur une longueur : $\dim\left(\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{A}\right)\right) = \dfrac{\dim(A)}{L}$.

III.2 Expressions

III.2.1 Coordonnées cartésiennes

Le rotationnel de $\overrightarrow{A}$ est un vecteur dont la première composante suivant x, en coordonnées cartésiennes s'écrit $\dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}$. Les autres coordonnées selon y et z se déduisent par permutation circulaire.

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{A}\right) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{e}_z$$

III.2.2 Autres systèmes de coordonnées

Elles seront normalement données dans les énoncés ou alors on les calculera sans s'en rendre compte là aussi !

III.2.3 Avec l'opérateur ∇

De manière évidente $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{A}\right) = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}$.

III.3 Théorème de Stokes

On considère cette fois un contour fermé, orienté, fini Γ. La circulation de $\overrightarrow{A}$ le long du contour fermé orienté est égal au flux du rotationnel de $\overrightarrow{A}$ à travers une surface Σ quelconque, s'appuyant sur Γ et orientée par la règle du tire-bouchon.

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{A}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

III.4 Champ à circulation conservative

Le champ vectoriel $\overrightarrow{A}$ est à circulation conservative si quel que soit le contour Γ, fermé, orienté, la circulation de $\overrightarrow{A}$ le long de Γ est nulle. D'après le théorème précédent cela implique que quelle que soit la surface Σ, le flux du rotationnel de $\overrightarrow{A}$ à travers Σ soit nul également, et donc la nullité de rotationnel de $\overrightarrow{A}$.

$\overrightarrow{A}$ est à circulation conservative $\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{A}\right) = \overrightarrow{0}$.

C'est la caractérisation **locale** du caractère conservatif de la circulation d'un champ de vecteurs $\overrightarrow{A}$.

IV Laplacien

IV.1 Définitions

On distingue d'une part le laplacien **scalaire** d'un champ scalaire V, noté ΔV, qui par définition est tel que $\Delta V = \text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\right)(V)$ (divergence du gradient de V).

On constate que sont des dérivations d'ordre 2 qui interviennent cette fois.

On considère d'autre part le laplacien **vectoriel** d'un champ vectoriel qui lui associe un autre champ vectoriel. Par définition en coordonnées cartésiennes c'est un vecteur dont les trois composantes sont les laplaciens scalaires des composantes respectivement selon x, selon y et suivant z :

$\Delta\overrightarrow{A} = \Delta A_x \overrightarrow{e}_x + \Delta A_y \overrightarrow{e}_y + \Delta A_z \overrightarrow{e}_z$.

IV.2 Expressions

IV.3 Coordonnées cartésiennes

D'après la définition il vient facilement $\Delta V = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}$.

De même :

$\Delta\overrightarrow{A} = \left(\dfrac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)\overrightarrow{e}_x + \left(\dfrac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\overrightarrow{e}_y + \left(\dfrac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\overrightarrow{e}_z$.

IV.4 Autres systèmes de coordonnées

Elles seront données par les énoncés. Parfois là aussi on les calculera sans le savoir...

V Quelques relations particulières

V.1 Certaines compositions d'opérateurs sont identiquement nulles

La divergence du rotationnel de n'importe quel champ vectoriel est nul !

$$\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\overrightarrow{A}\right)\right) = 0$$

Le rotationnel du gradient de n'importe quel champ scalaire est nul également !

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,(V)\right) = \overrightarrow{0}$$

Moyen mnémotechnique "dire au gras" (di ro gra)...

Conséquences Si un champ vectoriel $\overrightarrow{A}$ est à circulation conservative son rotationnel est nul. Comme le rotationnel du gradient de n'importe quel champ scalaire est égale à zéro, on peut penser que, et on le montre, qu'il existe un champ scalaire V tel que $\overrightarrow{A}$ soit égal au gradient de V.

$\overrightarrow{A}$ à circulation conservative $\Leftrightarrow \exists V, \overrightarrow{A} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,(V)$ (V n'est pas unique).

On peut mettre un plus ou moins suivant les nécessités ($\overrightarrow{A} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,(V)$).

De même si un champ vectoriel est à flux conservatif, sa divergence est nulle. Alors comme la divergence du rotationnel de n'importe quel champ de vecteurs est nulle, on peut penser, et on le montre, qu'il existe un champ de vecteurs $\overrightarrow{C}$ tel que $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\overrightarrow{C}\right)$. $\overrightarrow{C}$ porte le nom de potentiel vecteur dont dérive $\overrightarrow{A}$.

$\overrightarrow{A}$ à flux conservatif $\Leftrightarrow \exists\overrightarrow{C}, \overrightarrow{A} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,(C)$, $\overrightarrow{C}$ n'est pas unique.

V.2 Une formule fondamentale avec le laplacien vectoriel

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\overrightarrow{A}\right)\right) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\operatorname{div}\left(\overrightarrow{A}\right)\right) - \Delta\overrightarrow{A}$$

V.3 Remarque finale

Les opérateurs gradient, divergence, rotationnel sont des opérateurs linéaires du premier ordre, c'est-à-dire avec des dérivés d'ordre 1

Les laplaciens scalaire et vectoriel sont des opérateurs linéaires avec des dérivés d'ordre 2.