

Corrigé du devoir surveillé n ° 6

I Modélisation : principe de la méthode de l'autofocus

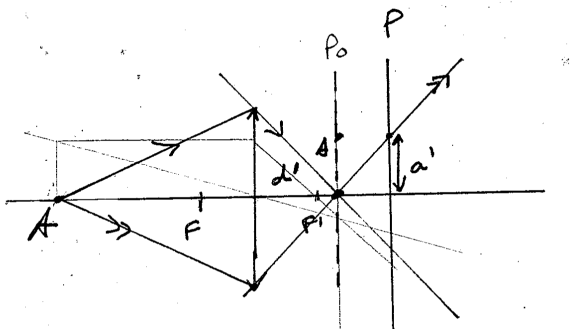
I.A Mise au point

- 1 Il suffit d'appliquer la relation de conjugaison en faisant attention à l'algébrisation de la formule, soit $\frac{1}{d'} - \frac{1}{x_0} = \frac{1}{f'_0}$, d'où $d' = \frac{x_0 f'_0}{x_0 + f'_0} = 10,5 \text{ cm}$.

La formule du grandissement permet d'accéder à la taille de l'image (on met une valeur absolue car le grandissement est négatif ici) : $h' = \left| \frac{d'}{x_0} \right| h = 0,52 \text{ cm}$

- 2 Le schéma demandé est donné ci-après (il faut prendre des rayons auxiliaires pour déterminer la position A' de l'image de A).

La relation de Thalès, en valeur absolue donne alors facilement $\frac{a'}{\delta} = \frac{a}{d'}$, soit $a' = a \frac{\delta}{d'} = \frac{a\delta(x_0 + f'_0)}{x_0 f'_0} = 0,24 \text{ cm}$.



- 3 On va faire l'hypothèse que les pixels sont carrés, de côté b et en nombre N sur la surface S . On a donc $Nb^2 = S$, soit $b = \sqrt{\frac{S}{N}} = 10 \mu\text{m}$.

La condition pour avoir une image nette est que le rayon de la tâche a' soit inférieur à la moitié de la taille d'un pixel, soit $a' < b/2$, ou encore $\delta < \frac{bd'}{2a} = 1,05 \mu\text{m}$! La marge de manoeuvre est vraiment faible !

I.B

- 4 Par la relation de conjugaison de Descartes comme précédemment il vient $d = \frac{f'd_0}{d_0 - f'}$.
- 5 Si A est sur (P) c'est qu'il est en O . Par ailleurs comme (P_1) est conjugué avec (P) , l'image de A sera aussi sur (P_1) ! Il suffit donc de tracer le rayon issu de O passant par (O_1) et de déterminer son intersection avec (P_1) pour déterminer A_1 , ce qui est représenté sur la figure suivante.

Par stigmatisme les rayons issus de $A = O$ passant par les bords de la lentille convergent vers A_1 après l'avoir traversée.

F'_1 se détermine alors facilement par l'intersection du rayon arrivant parallèlement à l'axe optique et passant par le bas de la lentille, après traversée de cette dernière et de l'axe optique de la lentille L_1 .

Tout est représenté sur la figure suivante.

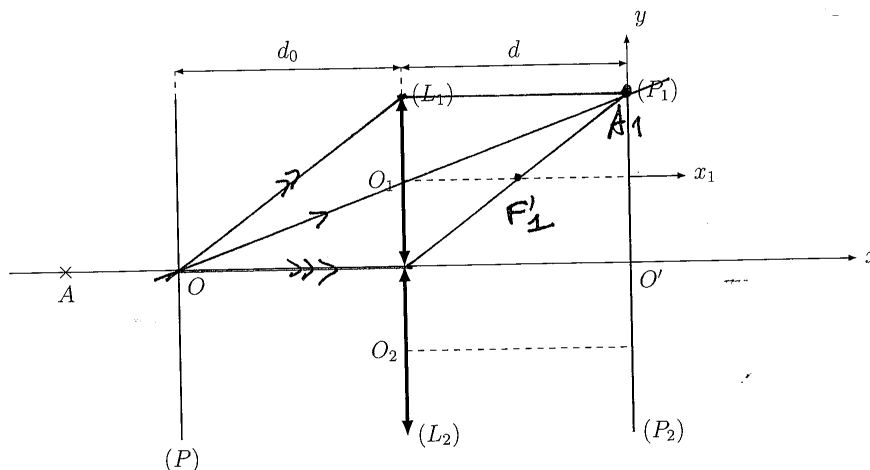
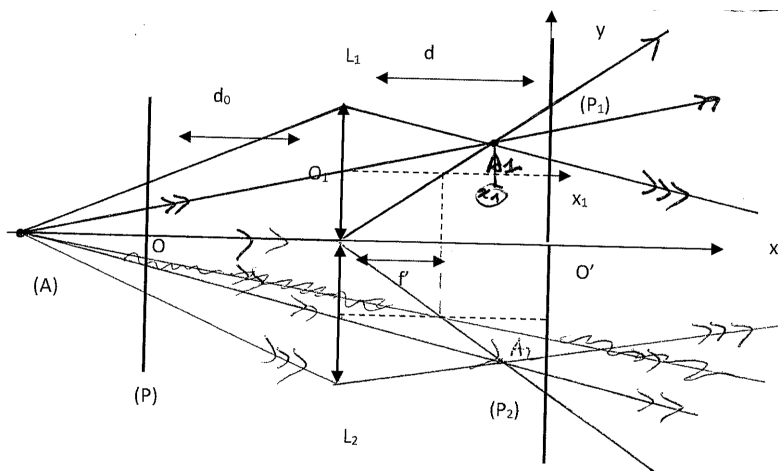


FIGURE 3 – Principe des lentilles de l'auto-focus

- 6 L'utilisation des triangles semblables permet facilement d'obtenir une des trois relations suivante : $y_1 = \frac{ad}{f'} = \frac{ad_0}{d_0 - f'} = a \left(1 + \frac{d}{d_0} \right)$.
Par symétrie $y_2 = -y_1$.
- 7 Il vient donc facilement $\Delta\Phi_0 = 2y_1 = 2a \left(1 + \frac{d}{d_0} \right)$.
- 8 Aucune difficulté pour construire l'image A_1 par les techniques habituelles.



Comme précédemment on peut écrire par utilisation de triangles semblables : $y_1 = a \times \frac{x_1}{f'}$.

Or par conjugaison $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{p - d_0} = \frac{1}{f'}$, d'où $y_1 = ax_1 \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{p - d_0} \right) = a \left(1 - \frac{x_1}{p - d_0} \right)$.

- 9 Les rayons passant par les bords convergent vers l'image A_i correspondante après la lentille L_i d'où les tracés sur la figure.
- 10 Toujours par des considérations géométriques (triangles semblables) il vient $y_s = y_1 \times \frac{d}{x_1}$.
On a de même $\frac{d - x_1}{x_1} = \frac{y_s - y_i}{2a}$, ce qui donne directement le résultat attendu $y_i = 2a \left(1 - \frac{d}{x_1} \right) + \frac{dy_1}{x_1}$.
- 11 Par simple symétrie : le point supérieur de la tache sur (P_2) est le symétrique du point inférieur de la tache sur (P_1) , d'où $y_i = -y_s$!
Dès lors $\Delta\Phi = y_s + y_i = y_1 \times \frac{d}{x_1} + 2a \left(1 - \frac{d}{x_1} \right) + \frac{dy_1}{x_1} = 2a + 2 \frac{d}{x_1} (y_1 - a)$.

Or $y_1 - a = \frac{x_1}{d_0 - p}$, d'où par substitution le résultat attendu.

□ 12 Il vient par un calcul direct $\Delta^2\Phi = 2ad \left(\frac{1}{d_0 - p} - \frac{1}{d_0} \right)$.

□ 13 En inversant la formule précédente il vient $p = d_0 - \frac{1}{\frac{\Delta^2\Phi}{2ad} + \frac{1}{d_0}} = 1,98 \text{ cm} > 0$.

Comme cette valeur est positive l'écran est à gauche de A . Il faut le déplacer vers la droite.

II Problème d'après Mines-Ponts 2014 PC

II.A L'expérience d'Ørsted

□ 1 cf. cours

□ 2 cf. cours

$$\vec{B}_\infty(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \vec{e}_\theta$$

□ 3 La bonne expression est la (b), $\vec{B}_L(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \sin\alpha_0 \vec{e}_\theta$, car l'autre n'est pas homogène.

De plus si le fil devient infini α_0 tend vers $\frac{\pi}{2}$ ce qui fait que la première expression donnerait un champ nul, en contradiction avec la question précédente.

On a facilement

$$\vec{B}_L(M) = \vec{B}_\infty(M) \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{\xi^2}}}$$

On pose donc

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{\xi^2}}}$$

On calcule facilement $f(1) = 0,447$ et $f(20) = 0,995$. Si $20 \ll \xi$, il est clair que $f(\xi) \simeq 1$ et que donc on pourra considérer le fil comme infini, et utiliser le champ calculé à la question 2.

□ 4 D'après le cours $\vec{\mu}_c = I\vec{S}$, $\vec{S} = S\vec{n}$ étant le vecteur surface associé à la boucle (de norme S , orienté par la règle du tire-bouchon). Ce moment s'exprime en $A.m^2$.

La résultante des forces subies par cette boucle plongée dans un champ magnétique uniforme est nulle.

Le moment résultant des forces subies est donné par

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$$

□ 5 Au moment précédent, il faut rajouter celui dû au champ magnétique terrestre, à savoir $\vec{\Gamma}_t = \vec{\mu} \wedge \vec{B}_t$ (car \vec{B}_t est uniforme). La composante selon Oy de ce moment est $\Gamma_{t,y} = -\mu B_t \sin\varphi$. Dès lors l'application du théorème du moment cinétique en projection sur Oy pour ce solide en rotation autour d'un axe fixe donne

$$J_y \ddot{\varphi} = -\mu B_t \sin\varphi + \mu \left(\vec{B}_\infty(y) \cdot \vec{e}_x \right) \cos\varphi \gamma(\delta)$$

□ 6 L'équation précédente s'explique en $J_y \ddot{\varphi} = -\mu B_t \sin\varphi - \mu \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \cos\varphi \gamma(\delta)$. À l'équilibre $\varphi =$

$\varphi_e = \text{cte}$, d'où $\ddot{\varphi} = 0$, et donc on obtient la relation $-\mu B_t \sin\varphi_e - \mu \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \cos\varphi_e \gamma(\delta) = 0$,

soit $\frac{\tan\varphi_e}{\gamma(\delta)} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi y B_t}$. Ce qui est de la forme attendue avec $I_t = \frac{2\pi y B_t}{\mu_0}$.

On voit que $B_t = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}$, i.e. c'est le courant qui parcourant le fil créerait un champ magnétique égal au champ magnétique terrestre.

L'application numérique donne $I = 12$ A, ce qui est une valeur très importante (en comparaison avec celles qu'on manipule en TP... et heureusement car ce serait très dangereux...)

II.B Étude d'un dispositif de lévitation magnétique

II.B.1 Champ magnétique créé par la couronne circulaire

□ 7 On obtient les expressions du cours en développant, à savoir

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu \cos \theta}{r^3}, B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu \sin \theta}{r^3}, B_\varphi = 0$$

Les expressions précédentes, indépendantes de φ montrent que le problème est invariant par rotation autour de Oz .

On calcule d'abord $B_z = B_r \cos \theta - B_\theta \sin \theta$, puis on reporte $\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{\rho_c^2 + z^2}}$ et $\sin \theta = \frac{\rho_c}{\sqrt{\rho_c^2 + z^2}}$ pour obtenir par identification $\Psi(\eta) = \frac{2\eta - 1}{(\eta + 1)^{5/2}}$ avec $\eta = \left(\frac{z}{\rho_c}\right)^2$. Ainsi $\alpha = 2$.

□ 8 L'allure de la courbe est donnée sur la figure 1.

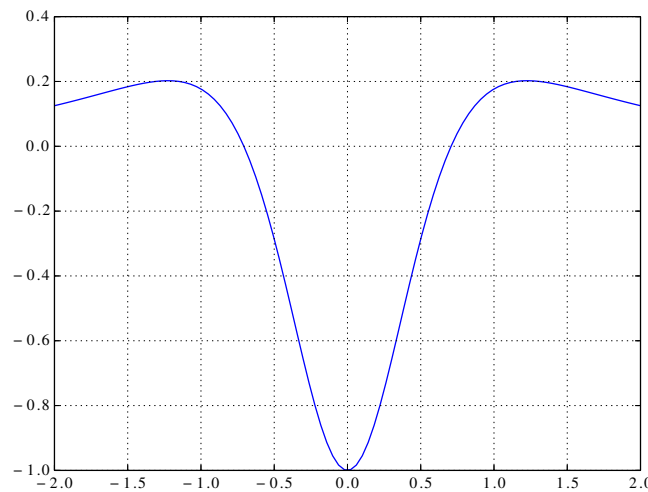


FIGURE 1 – Graphe de B_z en unités arbitraires

□ 9 L'amplitude $B_{cz}(z)$ s'obtient par intégration. Un élément de longueur $d\ell$ de la couronne, de moment magnétique $d\mu$, crée un champ élémentaire $dB_{cz} = \frac{\mu_0}{4\pi\rho_c^3} \Psi(\eta) d\mu$, d'où

$$B_{cz} = \frac{\mu_0}{4\pi\rho_c^3} \Psi(\eta) \mu_l 2\pi\rho_c = \frac{\mu_0\mu_l}{2\rho_c^2} \Psi(\eta)$$

□ 10 L'application numérique donne $B_{cz} = 6,6 \cdot 10^{-3}$ T

II.B.2 Étude de la position du globe selon l'axe Oz

□ 14 On a

$$E_{p,m} = -\vec{\mu}_g \cdot \vec{B} = -\mu_g B_{cz}.$$

De même

$$E_p = E_{p,m} + m_t g z = -\mu_g B_{cz} + m_g z.$$

Pour une valeur ni trop grande ni trop petite de m_t , l'allure du graphe de E_p est donnée sur la figure 2. Elle montre l'existence d'une cote z_e correspondant à un minimum de E_p et donc à un équilibre stable.

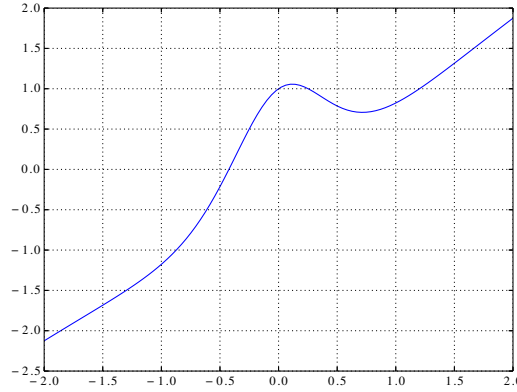


FIGURE 2 – Graphe de $E_p(z)$ en unités arbitraires

- 15 D'après le cours on sait qu'autour de la position d'équilibre stable on aura des oscillations dont la pulsation ω_0 est telle que $\omega_0^2 = \frac{1}{m_t} \frac{\partial^2 E_p}{\partial z^2} \Big|_{z=z_e} = -\frac{\mu_g}{m_t} \frac{\partial^2 B_{cz}}{\partial z^2} \Big|_{z=z_e} = \frac{\mu_g \kappa}{m_t}$.
- 16 Comme B_{cz} ne dépend pas de φ , il vient en développant l'expression :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial B_{cz}}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 B_{cz}}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 B_{cz}}{\partial z^2} = 0$$

- 17 En un maximum selon l'axe on a $\frac{\partial B_{cz}}{\partial \rho} \Big|_{z=z_e} = 0$ et $\frac{\partial^2 B_{cz}}{\partial z^2} \Big|_{z=z_e} > 0$. Dès lors d'après l'expression précédente $\frac{\partial^2 B_{cz}}{\partial \rho^2} \Big|_{z=z_e} = -\frac{\partial^2 B_{cz}}{\partial z^2} \Big|_{z=z_e} < 0$, ce qui fait que ce ne peut être un maximum dans la direction radiale, et donc un minimum d'énergie potentiel, et donc une position d'équilibre stable radiale. C'est d'ailleurs pour cela qu'il y a un dispositif électronique d'asservissement de position dans ce dispositif.

III D'après Banque PT Physique A 2016 Partie D

III.A Système interférentiel à deux fentes

- 1 Par symétrie les deux rayons sont en phase en F_1 et F_2 . Le déphasage est donc localisé après le plan des trous.

En imaginant une source en M envoyant des rayons en sens inverse de celui suivi par la lumière on peut affirmer que les plans d'onde pour cette source imaginaire sont des plans perpendiculaires aux rayons lumineux entre le plan des trous et la deuxième lentille. Un calcul élémentaire classique montre alors que la différence de marche entre $F_1 M$ (ou $F_2 M$) et le rayon fictif de la figure est en valeur absolue $a \sin \alpha \simeq a\alpha$, avec α l'angle que fait le rayon passant par le centre de la lentille et arrivant en M , avec l'axe optique. Comme on a utilisé le stigmatisme de la lentille c'est qu'on était dans les conditions de Gauss et que l'angle α est très petit devant 1 radian. Dès lors on a $\tan \alpha \simeq \alpha = \frac{|z|}{f'}$, soit $|\delta| = \frac{az}{f'}$.

Enfin il est clair que le rayon passant par F_1 est en avance de phase sur le rayon fictif si $z > 0$. On a donc $\varphi = +\frac{2\pi}{\lambda} \frac{az}{f'}$.

- 2 D'après la formule de Fresnel des interférences à deux ondes de même amplitude déphasées de 2φ on a directement

$$E = 2E_0 (1 + \cos(2\varphi))$$

L'allure de la courbe est une sinusoïde de valeur moyenne $2E_0$, variant entre 0 et $4E_0$ de période π .

III.B Système interférentiel à trois fentes

□ 1

- (1) Il faut cette fois, comme il y a trois ondes, faire le calcul complet. On a l'amplitude complexe totale en M donnée par $\underline{s} = s_0 (e^{j\varphi} + 1 + e^{-j\varphi}) = s_0 (1 + 2 \cos \varphi)$.

Dès lors l'éclairement est effectivement bien $\frac{1}{2} k \underline{s} \underline{s}^* = E_0 (1 + 2 \cos \varphi)^2$ avec $E_0 = \frac{1}{2} k s_0^2$.

- (3) L'allure est facile à tracer : on trace d'abord $(1 + 2 \cos \varphi)$ qui est une sinusoïde de valeur moyenne et d'amplitude 2, qui varie donc entre -1 et 3 , avec une période de 2π . On met ensuite suite cette fonction au carré, ce qui l'a fait varier entre 0 et 9, et l'ancien minimum en π qui valait -1 devient une maximum secondaire valant cette fois $+1$.

Par ailleurs d'après la fonction réseau pour $N = 3$ qui s'applique ici on savait à quoi s'attendre.

□ 2

- (1) Il suffit de reprendre le calcul précédent en remplaçant le 1 correspondant à l'amplitude du rayon passant par F_0 par $-j$ (pour traduire le retard de phase de $\pi/2$). L'amplitude totale en M est alors donnée par $\underline{s} = s_0 (e^{j\varphi} - j + e^{-j\varphi}) = s_0 (2 \cos \varphi - j)$.

On en déduit l'éclairement $\frac{1}{2} k \underline{s} \underline{s}^* = E_0 (2 \cos \varphi - j) (2 \cos \varphi + j) = E_0 (4 \cos^2 \varphi - j^2) = E_0 (1 + 4 \cos^2 \varphi) = E_0 (3 + 2 \cos 2\varphi)$.

Le graphe est celui d'une sinusoïde de valeur moyenne $3E_0$, qui varie entre E_0 et $5E_0$ avec une période π .

On a donc bien une alternance régulière de franges sombres et franges brillantes, de contraste $\mathcal{C} = \frac{5-1}{5+1} = \frac{2}{3}$, ce qui fait qu'on arrive effectivement à les distinguer. La période spatiale est celle de $\cos \frac{2\pi}{\lambda} \frac{2az}{f'}$, i.e. $i = \frac{\lambda f'}{2a}$.

- (2) Il faut que la différence des chemins optiques, avec et sans la lame, à savoir $(n-1)e$ soit égale à $\lambda/4$. On a donc $\lambda = 4(n-1)e = 600 \text{ nm}$, ce qui est dans le domaine visible.
- (3) En O' le retard de phase du rayon central avec la lame, en prenant comme origine O pour le même rayon sans la lame est $\frac{2\pi}{\lambda} (x + e(n-1))$.

Pour le calculer pour le rayon $F_1 O'$ on peut dans un premier temps projeter O orthogonalement sur le segment de ce rayon après la lentille. On note I le point correspondant. Par le théorème de Malus O et I sont en phase, donc le retard de phase en I est nul. On a vérifié alors facilement que le retard de phase en O' est $\frac{2\pi}{\lambda} (IO') = \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \alpha$.

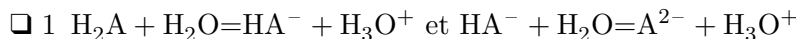
Les rayons seront en phase si donc $\frac{2\pi}{\lambda} (x + e(n-1)) = \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \alpha$, soit $x + e(n-1) = x \cos \alpha$. On en déduit $x = \frac{e(n-1)}{\cos \alpha - 1} \simeq -\frac{2e(n-1)}{\alpha^2}$, en utilisant l'approximation $\cos \alpha \simeq 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$.

On trouve alors $e = -\frac{x\alpha^2}{2(n-1)f'^2} = \frac{1.10^{-2} \cdot 1.10^{-8}}{2 \times 0.5 \times 1.10^{-2}} = 10 \text{ nm}!!$

- 3 C'est une question sur les calculs d'incertitudes... Comme les dates ne sont connues que par les années Frits Zernike a pu avoir son Nobel à 64 ou 65 ans. On peut même affirmer qu'il l'a eu à 65 ans avec une incertitude de 1 an...

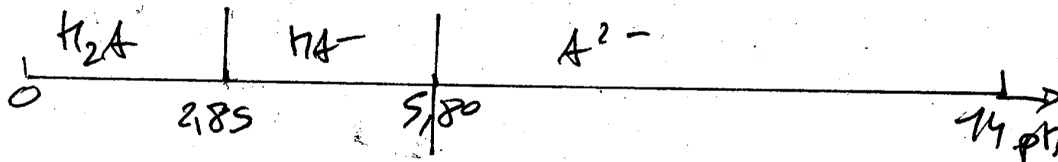
IV Chimie Réaction acido-basiques

IV.A Diagramme de prédominance



D'où $K_{A,1} = \frac{[\text{HA}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{H}_2\text{A}]}$ et $K_{A,2} = \frac{[\text{A}^{2-}][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HA}^-]}$.

Et enfin le diagramme suivant :



□ 2 On obtient

pH	1,50	2,00	2,85	3,50	5,00
x	$4,5 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	1	4,5	$1,4 \cdot 10^2$

Ces valeurs sont en accord avec le diagramme de prédominance précédent.

□ 3 De même

pH	3,50	5,00	5,80	6,50	8,00
x	$5,0 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-1}$	1	5,0	$1,6 \cdot 10^2$

□ 4 Comme on ne connaît pas la concentration totale c_0 en espèce A, on ne pourra calculer que des pourcentages. On peut cependant prédire sans doute une légère domination de HA^- , et une ultra-minorité de A^{2-} d'après les résultats précédents.

On a la relation suivante $c_0 = [\text{H}_2\text{A}] + [\text{AH}^-] + [\text{A}^{2-}]$, soit $c_0 = \frac{[\text{AH}^-]}{x} + [\text{AH}^-] + y[\text{AH}^-]$,

d'où $\frac{[\text{AH}^-]}{c_0} = \frac{1}{\frac{1}{x} + 1 + y} = 81 \%$.

D'où $[\text{H}_2\text{A}] = \frac{[\text{AH}^-]}{x} = 18,2 \%$, et $[\text{A}^{2-}] = y[\text{AH}^-] = 0,4 \%$

IV.B Diagramme de distribution de l'acide citrique

□ 1 C'est bien sûr l'espèce la plus acide qui a une pourcentage de 100% à $pH = 0$. On identifie donc la courbe 4 à H_3A . La courbe 3 qui est la première à augmenter fortement quand on augmente le pH est alors nécessairement H_2A^- , puis la courbe 2 celle de HA^{2-} et 1 celle de A^{3-} .

□ 2 Par lecture graphique des pH aux intersections des courbes 4 et 3, puis 3 et 2 et enfin 2 et 1 on obtient $pK_{A,1} = 3,2$, $pK_{A,2} = 4,8$ et $pK_{A,3} = 6,4$.

□ 3

(1) Attention au piège de la molécule d'eau supplémentaire. La masse molaire est de

210 g/mol. On a donc une concentration initiale de $\frac{1,05}{0,25} = 2,0 \cdot 10^{-2}$ mol/L.

(2) À $pH = 5,5$ on lit (et on mesure à la règle) des pourcentages de 76 % de AH^{2-} , de 12 % de A^{3-} et 11 % de AH_2^- . Le reste très faible (mais à calculer quand même est du AH_3 . On obtient donc les concentrations suivantes $[\text{AH}^{2-}] = 1,5 \cdot 10^{-2}$ mol/L,

$[A^{3-}] = 2,4 \cdot 10^{-3}$ mol/L, $[AH_2^-] = 2,1 \cdot 10^{-3}$ mol/L. Pour le dernier il faut utiliser la constante d'acidité pour écrire $[AH_3] = \frac{[AH_2^-][H_3O^+]}{K_{A,1}} = 1,0 \cdot 10^{-5}$ mol/L.