PROBLEME 1 : DES CORDES

On va aborder différentes questions sur les cordes. Milieux à la fois solides, élastiques et partiellement déformables, on en verra successivement des aspects dynamiques, vibratoires et musicaux.

Une corde est un milieu unidimensionnel de section uniforme S, $\sqrt{S}$ étant faible devant la dimension longitudinale, de masse linéique μ. On paramètrera la corde par son abscisse curviligne s ou, lorsqu'elle est assez tendue, par une variable d'espace x linéaire. Ses points se succèdent sans toujours rester alignés.

On note $\vec{T}(M,t) = \vec{T}(x,t)$ la tension de la corde, exercée par le brin x^+ sur le brin x^- en un point M d'abscisse x, à l'instant t. Soit $\vec{\tau}$ le vecteur tangent à la corde dans le sens des x croissants. On a alors :

$$\vec{T}(x,t) = T(x,t)\,\vec{\tau} = T_x(x,t)\,\vec{e}_x + T_z(x,t)\,\vec{e}_z$$

où $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_z$ sont les vecteurs unitaires respectifs des axes Ox et Oz.

Partie I : Corde tendue : équation d'onde, cordes stationnaires et cordes agitées

Dans cette partie, la corde est tendue entre deux points d'accrochage, fixes, l'un en $x = 0$, l'autre en $x = L$. À l'équilibre, elle est quasiment rectiligne (sur l'axe Ox) entre ces deux points. Lorsqu'elle est en mouvement, elle reste proche de sa position d'équilibre et faiblement inclinée par rapport à celle-ci. La pesanteur sera négligée. Une partie de corde située à l'équilibre en $(x,0,0)$ se situera en $(x,0,z)$ hors équilibre : on ne considère que les mouvements latéraux dans le plan Oxz.

1°) Expliquer qualitativement devant quelle grandeur on néglige le poids et pourquoi on peut le faire.

2°) Dans l'approximation des petits mouvements que l'on fait, on assimile la longueur ds d'un tronçon de corde à son projeté dx sur l'axe (Ox). Quelle est la relation entre T_x et T, la norme de la tension ?

3°) Appliquer le principe fondamental de la dynamique à une longueur ds de la corde. En déduire que T_x est constant : que peut-on en conclure pour T, la norme de la tension dans la corde ?

4°) Montrer que l'équation en z est à une équation du type : $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

Donner l'expression de c en fonction des paramètres du problème et en faire une analyse dimensionnelle. Commenter la dépendance de c par rapport aux paramètres dont elle dépend.

5°) Les solutions de l'équation aux dérivées partielles précédente peuvent s'écrire :

$$z(x,t) = f\,(ct - x) + g(ct + x)$$

Interpréter le sens physique des deux termes.

6°) On va chercher les formes des réponses correspondant à un régime purement sinusoïdal.
On utilise les notations complexes :

$$\underline{z}(x,t) = \underline{A}\,exp(j\omega[t - x/c]) + \underline{B}\,exp(j\omega[t + x/c])$$

où ω est la pulsation du signal, $\underline{A}$ et $\underline{B}$ des amplitudes complexes et j est l'imaginaire pur tel que $j^2 = -1$.
a) Donner les conditions aux limites de la corde.
b) En déduire la relation entre $\underline{A}$ et $\underline{B}$ ainsi que les valeurs de ω permises. Pour ces dernières, on introduira un entier naturel n et on indicera les pulsations et les fréquences : ω_n et f_n. Peut-on obtenir plus de précision sur les valeurs de $\underline{A}$ et de $\underline{B}$?
Donner une expression simple de $z(x,t)$ ne faisant plus intervenir que des réels. Comment nomme-t-on ce type d'onde et pourquoi ?
c) Comment appelle-t-on la plus petite valeur permise pour la fréquence $f_1 = \omega_1/(2\pi)$?
Comment nomme-t-on les suivantes ?
On considérera qu'un signal réel est composé d'une somme des solutions précédentes.
d) Décrire la solution correspondant à $n = 3$.

Partie II - Corde composée : conditions de passage.

On considère dans cette partie une corde composée de deux parties : l'une de masse linéique μ_1 et l'autre de masse linéique $\mu_2 \neq \mu_1$. Elles sont tendues par la même tension T et liées en O.
Les deux cordes sont suivant l'axe Ox et on ne considère pas le problème de leur point d'attache ailleurs qu'en O : elles pourront être considérées comme infinies, la première en x<0 et la seconde en x>0. On considère une onde incidente venant du milieu 1 et se dirigeant dans le sens des x croissants dont on donne la représentation complexe :

$$\underline{z}_i(x,t) = \underline{A}_i \exp\left(j\omega(t - \frac{x}{C_1})\right).$$

On veut déterminer les ondes réfléchie et transmise à la séparation des deux milieux. Les célérités y seront C_1 et C_2.

7°) Donner la représentation complexe des ondes transmise et réfléchie. On prendra $\underline{A}_t$ et $\underline{A}_r$ comme amplitudes complexes respectives de ces deux ondes. Pourquoi sont-elles de même pulsation que le signal incident ?

8°) Donner les conditions de passage à la frontière des deux milieux : quelles grandeurs sont continues et pourquoi ?

9°) Déterminer les amplitudes $\underline{A}_t$ et $\underline{A}_r$. Définir et donner l'expression des coefficients de transmission et de réflexion en fonction des deux masses linéiques, μ_1 et μ_2. Étudier trois cas particuliers liés à des valeurs remarquables ou limites de μ_2.

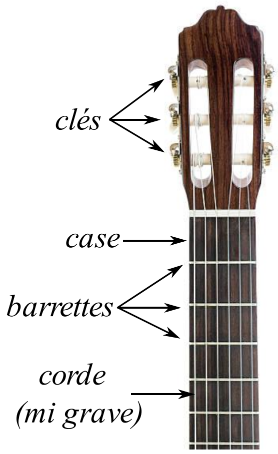
10°) On considère $\underline{A}_i = A$.

Dans le cas où $\mu_1 > \mu_2$, donner $z(x,t)$ pour les deux parties de la corde sous forme d'une somme d'un terme progressif et d'un terme stationnaire (l'un des termes peut être nul) dont on précisera les amplitudes.

11°) Faire l'analogie avec les ondes dans les lignes bifilaires. Peut-on, pour les cordes, définir une impédance caractéristique ?

Partie III - Application aux cordes de guitare.

On va s'intéresser dans cette partie aux vibrations produites par des cordes de guitare. On se servira des relevés faits sur la guitare photographiée ci-contre et sur laquelle figure des éléments de vocabulaire. L'acier a une densité de 7,87.
On considérera que les cordes sont tendues sur L = 64,25 cm, au nombre de six. Leur diamètre varie suivant la fréquence qui leur est associée. Les trois dernières, les plus aiguës, sont en acier et de diamètre 0,70 mm, 0,50 mm et 0,30 mm.
De la plus grave à la plus aiguë, elles sont associées aux notes mi_1, la_1 ,ré_2, sol_2, si_2 et mi_3 .

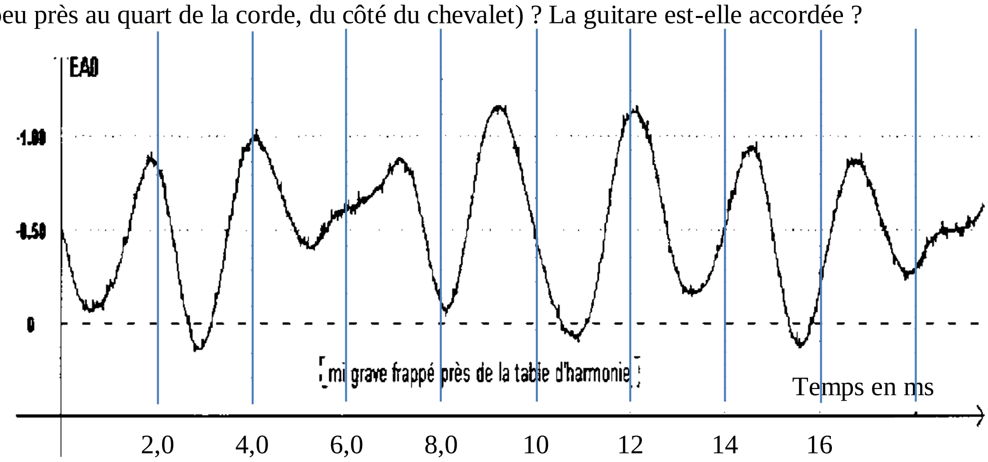


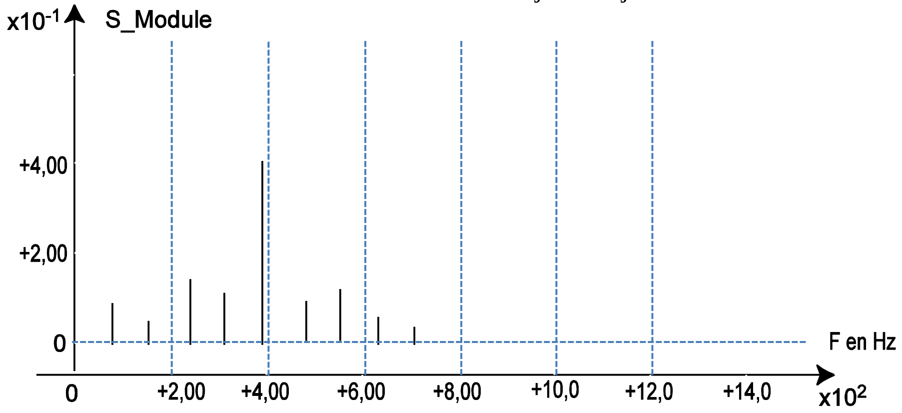
Précisons l'évolution des notes en fonction de la fréquence : les notes se répartissent sur une octave, c'est-à-dire un intervalle de fréquences entre f et 2f (fréquence double).
L'octave est divisée en une progression géométrique de 12 demi-tons. La succession des notes est : do, ré, mi, fa, sol, la, si, do. Les écarts entre deux notes successives est d'un ton (ou deux demi-tons) sauf entre mi et fa puis entre si et do où il n'y a qu'un seul demi-ton. La base de la gamme est le la_3 de fréquence 440 Hz que l'on peut obtenir sur la sixième corde de la guitare. Un dièse (#) correspond à une montée d'un demi-ton (ainsi mi# est en fait un fa).
On va se servir des solutions trouvées dans la partie I pour former les ondes qui se propagent sur ces cordes.

12°) Déterminer la fréquence fondamentale à vide (lorsqu'elle vibre sur toute sa longueur) et la tension de la corde la plus aiguë (en acier).

13°) Pour pouvoir changer la hauteur (fréquence) de la note jouée sur une corde, on a disposé des barrettes métalliques sur le manche (voir photo) : on peut ainsi, en appuyant la corde à l'aide du doigt sur ce support changer la longueur de la corde. En pratique, le doigt appuie dans la case (espace entre les barrettes) précédant la barrette.
a) Pourquoi les barrettes sont-elles disposées orthogonalement au manche et donc aux cordes ?
b) Sur quelle barrette doit reposer la corde de mi_3 pour obtenir le la_3 de référence de la gamme ? A quel endroit du manche est-elle placée ?

14°) Lorsque l'on frappe une corde ou qu'on la pince, elle n'acquiert pas la forme d'une des solutions trouvées dans la partie II. La solution qui se développera alors sera une somme de plusieurs de ces solutions. On procède à plusieurs enregistrements des sons produits par la guitare au moyen d'un microphone et d'un amplificateur. C'est la tension produite par l'amplificateur qui est en fait enregistrée.
a) Le son produit est-il “ harmonique ” ?
b) Le relevé 1 donné en annexe correspond à un son enregistré après avoir frappé la corde de mi_1, près du chevalet. Le relevé 2 est l'analyse de Fourier de ce signal.
Commenter ces documents. A quoi pourrait-on s'attendre pour un relevé obtenu après un coup frappé au niveau de la rosace (à peu près au quart de la corde, du côté du chevalet) ? La guitare est-elle accordée ?





relevé 2 : analyse de Fourier rapide du signal du relevé 1.

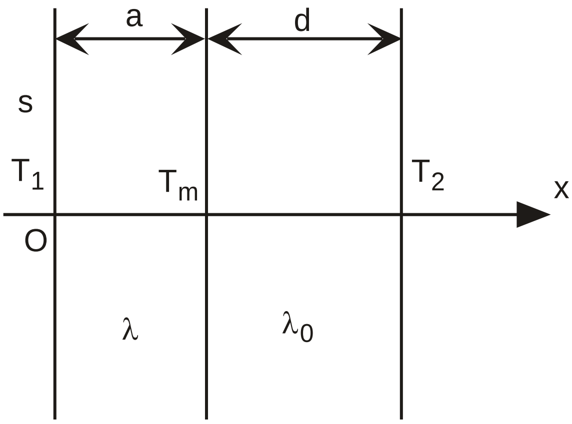
Pb n°2

Rappels de mathématiques

En coordonnés cylindriques, $\overrightarrow{grad}F = \frac{\partial F}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{u}_z$.

En coordonnés sphériques, $\overrightarrow{grad}F = \frac{\partial F}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$.

Partie I



Dans cette première partie, on cherche à qualifier les différents matériaux qui interviennent dans la construction d'un immeuble. Pour mesurer la conductivité thermique d'un matériau, on utilise le dispositif ci-contre : une couche d'épaisseur a et de section s du matériau inconnu de conductivité thermique λ est accolée à une couche d'épaisseur d et de section s d'un matériau connu, de conductivité thermique λ_0. L'ensemble est placé entre 2 sources de chaleur de températures T_1 et T_2, comme indiqué sur la figure. On mesure la température T_m à l'interface des 2 matériaux en régime stationnaire.

1. a) Rappeler l'expression de la loi de Fourier.
   b) Etablir l'équation de la conservation de l'énergie en dimension 1 au sein d'un matériau de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c_V , en négligeant ses variations de volume (en l'absence de terme de création). En déduire l'équation de la diffusion thermique en dimension 1.
2. a) Montrer qu'en régime stationnaire, le vecteur densité de flux thermique $\vec{j}_{cd}$ ne dépend pas de x.
   b) Exprimer T(x) dans chaque couche à l'aide de T_1, T_2, T_m, a, et d.
3. a) En déduire l'expression littérale de λ en fonction des données de l'expérience.
   b) Application numérique : calculer λ pour le béton sachant que pour une plaque de béton d'épaisseur a = 5,0 cm, on a relevé T_m = 35,2°C.
   on donne T_1 = 75 °C, T_2 = 25°C, d = 30 mm, λ_0 = 3,86 W.K^{-1}.m^{-1} , s = 400 cm^2.
4. Etablir l'expression littérale de la résistance thermique de la couche de gauche puis donner celle de l'autre couche. Application numérique, pour les deux.

Partie II

Dans cette seconde partie, on s'intéresse aux déperditions d'énergie pour un appartement que l'on assimile à un parallélépipède rectangle dont une seule des 6 faces est en contact avec l'extérieur, les autres faces étant en contact avec les appartements voisins. Cette façade extérieure comporte 30 m^2 d'ouvertures vitrées et 90 m^2 de murs (sans ouvertures). Les vitres ont une épaisseur de 4,0 mm ; les murs sont en béton de 30 cm d'épaisseur, recouverts extérieurement par 1,0 cm de crépi, et intérieurement par 1,0 cm de plâtre. On donne les conductivités thermiques (en W.K^{-1}.m^{-1}) :

verre : 0,90 crépi : 0,50 béton : 1,2 plâtre : 0,40.

On exploitera au maximum les analogies avec les problèmes d'électrocinétique. D'autre part, les valeurs numériques obtenues dans cette partie pourront paraître un peu surprenantes, du fait que le modèle de fuites thermiques est ici très simplifié et qu'il ne prend pas en compte les problèmes de convection thermique.

1. L'appartement est maintenu à température uniforme et constante (identique à celle des appartements voisins) T_{int} = 21°C. La température extérieure est T_{ext} = 2,0°C.

   a) Etablir un schéma électrique d'association de résistances équivalent au problème thermique posé.

   b) Quelle est l'expression littérale de la puissance des fuites thermiques à travers les surfaces vitrées ? Application numérique.

   c) Quelle est l'expression littérale de la puissance des fuites thermiques à travers les murs ? App. Num.

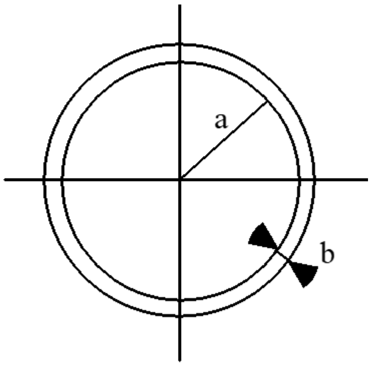
   d) Quelle serait l'expression littérale de la puissance du système de chauffage nécessaire pour maintenir dans l'appartement une température de 25°C (identique à celle des appartements voisins) ? App. Num.

2. On se replace dans l'hypothèse d'une température intérieure de 21°C, et on pose un survitrage en verre de 4,0 mm sur toutes les ouvertures, en laissant un espace d'air de 8 mm entre les vitres.

   a) On donne la valeur numérique de la résistance thermique d'une section de 1,0 m^2 de cette couche d'air : 0,15 W^{-1}.K. Quel lien existe-t-il entre cette grandeur , la surface S_v des vitrages, et la résistance thermique de la couche d'air totale comprise entre les vitres ?. Calculer numériquement cette résistance thermique totale de la couche d'air comprise entre les vitres..

   b) Déterminer la nouvelle puissance de chauffage nécessaire. App. Num.

Partie III



Dans cette partie, on s'intéresse au chauffage de *LA GEODE* à la Cité des Sciences à Paris en hiver. Il s'agit d'une salle sphérique de rayon a = 50 m, délimitée par un mur d'épaisseur b = 50 cm et de conductivité thermique λ = 0,015 SI.

La température intérieure est uniforme et maintenue constante à 20°C. La température extérieure est supposée constante et vaut -10°C.

a) Quel est le système de coordonnées le plus adapté au problème ? Que peut-on dire de la direction et du sens du vecteur densité volumique de courant de chaleur $\vec{j}_{cd}$ dans l'épaisseur de la paroi du mur ?

b) Dans le système de coordonnées choisi, de quelle(s) variable(s) dépend l'unique composante de $\vec{j}_{cd}$? Justifier.

c) Soient 2 sphères, de même centre que celles de la paroi de la géode, de rayons r_1 et r_2, avec $a < r_1 < r_2 < b$. Quel lien existe-t-il entre les flux thermiques conductifs à travers ces deux sphères ? une réponse justifiée est attendue.

d) En déduire de quelle façon j_{cd}, norme de $\vec{j}_{cd}$, dépend de r.

e) Déterminer l'expression littérale de la température en tout point de la paroi et celle de la norme j_{cd} en tout point de la paroi.

f) Déterminer l'expression littérale de la résistance thermique de la paroi.

$\boxed{\text{Problème 3}}$ CCINP PSI 2022

Partie I - Traitement des effluents et récupération de métaux précieux

Dans l'industrie du cuir, des sels de chrome sont ajoutés aux bains de tannage pour rendre le cuir imputrescible. Ces sels ne réagissent que partiellement avec les peaux, 40 à 50 % du chrome n'est pas absorbé. Le chrome VI est classé cancérogène pour l'Homme (groupe 1 du CIRC, groupe 1A par l'Union Européenne et groupe A par l'US-EPA), mais uniquement lors d'une exposition par inhalation (US EPA, 1998).

Les effluents doivent être traités de façon à respecter les normes de rejets en vigueur avant d'être rejetés. On se propose ici d'étudier certains aspects chimiques liés au fonctionnement d'une station d'épuration.

I.1 - Déchromatation

La **figure 1** correspond au diagramme E-pH du chrome, tracé pour une concentration totale en élément chrome dissous de 10^{-1} mol·L^{-1}. Les espèces prises en compte sont $Cr_2O_7^{2-}$, Cr^{2+}, Cr^{3+}, $Cr(OH)_{3(s)}$, $Cr_{(s)}$ et CrO_4^{2-}.

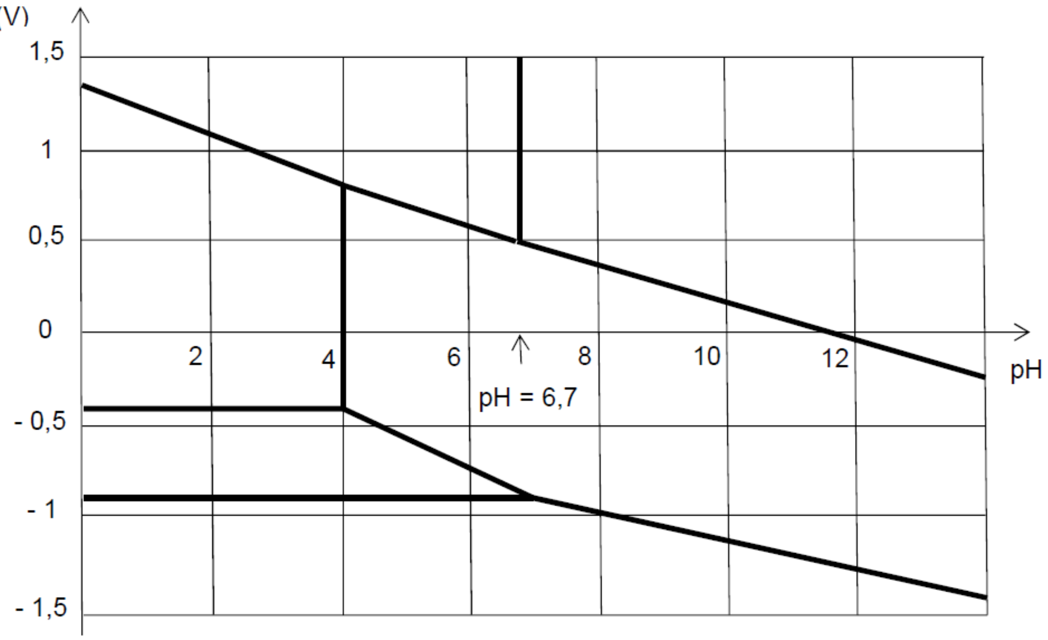


Figure 1 - Diagramme E-pH du chrome

Q1. Déterminer le nombre d'oxydation du chrome dans chacune des six espèces.
Montrer que le couple $Cr_2O_7^{2-}/CrO_4^{2-}$ forme un couple acido-basique. Préciser lequel est l'acide et lequel est la base.
Reproduire sur votre copie l'allure du diagramme E-pH de la **figure 1** en associant un domaine à chacune des six espèces.

Q2. Quel est le pH de début de précipitation de l'hydroxyde de chrome III ? En déduire le produit de solubilité de l'hydroxyde de chrome III, qui correspond à la constante d'équilibre K_s de la réaction :

$$Cr(OH)_{3(s)} = Cr^{3+} + 3OH^-$$

Q3. On considère la réaction chimique de constante d'équilibre K_1 :

$$Cr_2O_7^{2-} + H_2O = 2CrO_4^{2-} + 2H^+$$

On rappelle que sur la frontière qui sépare deux espèces dissoutes, il y a autant d'élément chrome dans chacune de ces deux espèces.
Déterminer, à l'aide du diagramme E-pH du chrome, la valeur numérique $pK_1 = -\log K_1$ de cette constante d'équilibre.

Q4. Lors de la déchromatation, les ions $Cr_2O_7^{2-}$ sont réduits en milieu acide en ions Cr^{3+} par les ions HSO_3^- qui s'oxydent en ions SO_4^{2-}. Écrire la réaction chimique qui correspond à la réduction d'une mole de $Cr_2O_7^{2-}$. Déterminer la valeur numérique de la constante d'équilibre K_2 associée à cette réaction. Conclure.

I.2 - Décyanuration

Les ions cyanure CN^-, des eaux polluées, sont éliminés par oxydation, en milieu fortement basique, en ions CNO^-, à l'aide d'un excès d'eau de javel suivant la réaction :

$$CN^- + ClO^- = CNO^- + Cl^-$$

L'eau de javel sera assimilée ici à une solution équimolaire d'ions Cl^- et d'ions ClO^-. La **figure 2** correspond au diagramme E-pH du chlore, tracé pour une concentration totale en élément chlore dissous de 10^{-1} mol·L^{-1}.

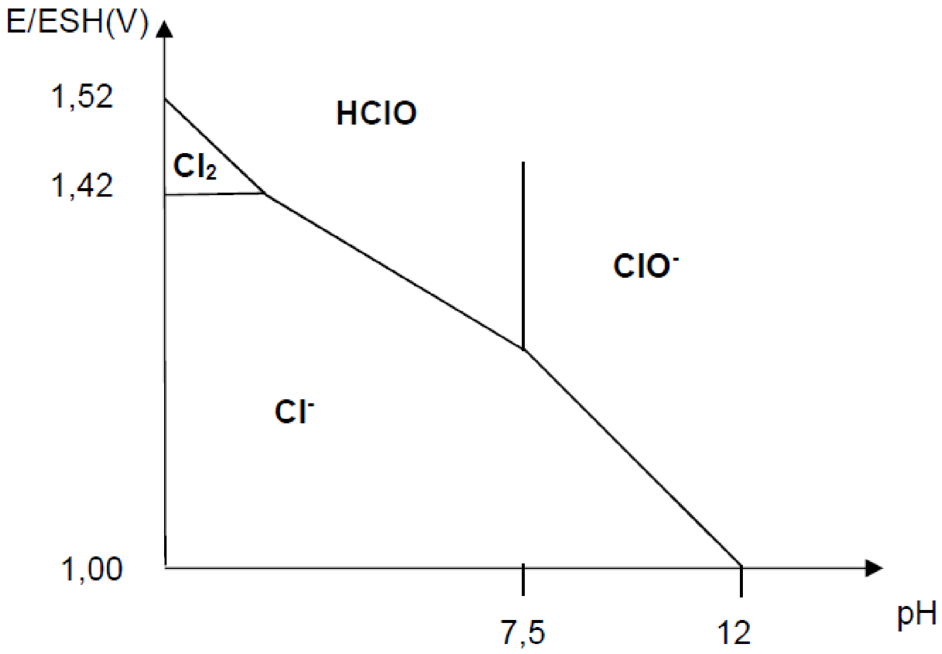


Figure 2 - Diagramme E-pH du chlore

Q5. Justifier qualitativement à l'aide des diagrammes E-pH que cette réaction est quasi-totale.

Le dichlore Cl_2 est un gaz très toxique, voire mortel.

Q6. Pourquoi est-il déconseillé d'utiliser de l'eau de javel en milieu trop acide. Ecrire l'équation chimique qui se produit lorsqu'on acidifie trop fortement une solution d'eau de javel.

Données	
Potentiels standard d'oxydoréduction à 298 K : $E°(Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+}) = 1,33$ V $E°(SO_4^{2-}/HSO_3^-) = 0,17$ V $E°(CNO^-/CN^-) = -0,13$ V $E°(Au(CN)_2^-/Au_{(s)}) = -0,6$ V	Pouvoir calorifique (énergie thermique libérée lors de la combustion d'une mole de carburant) : méthane : 803 kJ·mol^{-1} fuel : 7 600 kJ·mol^{-1}
Unité de surface : 1 hectare = 10^4 m^2 Perméabilité magnétique de l'air assimilé au vide : $\mu_0 = 4\,\pi \cdot 10^{-7}$ H·m^{-1}	Formules trigonométriques : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$