DEVOIR MAISON 9 (Intégration)

Corrigé

Problème 1 Extrait CCP PSI 2013

Q1. La fonction $k : t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Elle est prolongeable par continuité en zéro par la valeur $\dfrac{1}{2}$ car $1-\cos(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$ donc $\int_0^1 k(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Elle vérifie $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leqslant k(t) \leqslant \dfrac{2}{t^2}$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge donc par comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty} k(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

On conclut que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } K = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Notons que comme k est positive, cela revient à affirmer que k est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q2. Soit $A > 0$. La fonction sinus cardinal $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $]0,A]$ et est prolongeable par continuité en zéro par la valeur 1 car $\sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{l'intégrale } D(A) = \int_0^{A} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Q3. Soit A et ε deux nombres réels tels que $0 < \varepsilon < A$. On réalise l'intégration par parties sur le segment $[\varepsilon, A]$ où les fonctions $u : t \mapsto 1-\cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^A u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1-\cos(A)}{A} - \frac{1-\cos(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_\varepsilon^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

L'équivalent $1-\cos(\varepsilon) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\varepsilon^2}{2}$ montre que $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$ et la majoration $|\frac{1-\cos(A)}{A}| \leqslant \frac{2}{A}$ montre que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{1-\cos(A)}{A} = 0$.

On en déduit d'abord (en faisant tendre ε vers zéro) que

$$D(A) = \frac{1-\cos(A)}{A} + \int_0^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

et ensuite (en faisant tendre A vers l'infini) que

$$\lim_{A\to+\infty} D(A) = K.$$

Donc :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge et } K = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} D(A).}$$

Q4. On pose

$$\ell : (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-tx}.$$

On vérifie les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètre (qui assure en même temps la définition) :

$\boxed{1}$ Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $x \mapsto \ell(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$\boxed{2}$ On a la domination $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, $|\ell(x,t)| \leqslant k(t)$, où la fonction k, définie à la première question, est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (elle est bien indépendante de x).

Notons qu'on a bien également (même si la vérification de cette hypothèse n'est pas exigée par le programme) pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la continuité par morceaux de l'application $t \mapsto \ell(x,t)$ sur $]0,+\infty[$.
On conclut alors que :

$$\boxed{\text{l'application } L : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-tx}\, \mathrm{d}t \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}_+.}$$

Q5. On vérifie les hypothèses du théorème de classe $\mathscr{C}^2$ des intégrales à paramètres.

$\boxed{1}$ Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \ell(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{\partial \ell}{\partial x}(x,t) = -\frac{1-\cos(t)}{t} e^{-tx} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \ell}{\partial x^2}(x,t) = (1-\cos(t)) e^{-tx}.$$

$\boxed{2}$ Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
La fonction $t \mapsto \ell(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a vu que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $|\ell(x,t)| \leqslant k(t)$ avec k intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'où le résultat par comparaison par inégalité).
La fonction $t \mapsto \dfrac{\partial \ell}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ et prolongeable par continuité en 0 (puisque $1-\cos(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$).
On a de plus $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 \left|\dfrac{\partial \ell}{\partial x}(x,t)\right| = \lim\limits_{t\to+\infty} (1-\cos t) t e^{-xt} = 0$ car $t \mapsto 1-\cos(t)$ est bornée et croissances comparées ($x > 0$).
On a donc $\left|\dfrac{\partial \ell}{\partial x}(x,t)\right| = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, pour tout $t \in [1,+\infty[$, $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t$ converge.
Ainsi, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial \ell}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

$\boxed{3}$ Pour tout $a \in]0,+\infty[$, on dispose la domination :

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times \mathbb{R}_+^* \mapsto \left|\frac{\partial^2 \ell}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \psi_a(t) := 2e^{-ta},$$

et la fonction ψ_a est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après le cours (intégrale de référence avec $a > 0$) (et bien indépendante de x).

On conclut que L est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[a,+\infty[$, et qu'on a les formules suivantes, valables pour tout $x \in [a,+\infty[$:

$$\boxed{\begin{aligned} L'(x) &= -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t} e^{-tx}\, \mathrm{d}t, \\ L''(x) &= \int_0^{+\infty} (1-\cos(t)) e^{-tx}\, \mathrm{d}t. \end{aligned}}$$

L'appartenance à la classe $\mathcal{C}^2$ étant une propriété locale, on en déduit que :

$$\boxed{\text{l'application } L \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur l'intervalle }]0,+\infty[\text{ et les formules sont valables pour tout } x \in]0,+\infty[.}$$

Q6. Ces deux fonctions ont pour limite zéro en $+\infty$ (puisque $t \mapsto 1-\cos(t)$ est bornée) donc elles sont bornées (par exemple par 1) dans un voisinage de $+\infty$, disons sur $[b,+\infty[$.

Par ailleurs, elles sont prolongeables par continuité en zéro (puisque $1-\cos(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$), donc les prolongements correspondants, continus sur le *segment* $[0,b]$, y sont bornés.

On en déduit que :

$$\boxed{\text{les fonctions } t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2} \text{ et } t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t} \text{ sont bornées sur }]0,+\infty[.}$$

On note M et M' des réels positifs tels que

$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad \left|\frac{1-\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant M,$$
$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad \left|\frac{1-\cos(t)}{t}\right| \leqslant M'.$$

Par inégalité triangulaire et grâce à la valeur de l'intégrale convergente :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \ \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-tx}}{x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x},$$

on en déduit que

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad |xL(x)| \leqslant x\int_0^{+\infty} Me^{-tx}\,\mathrm{d}t = M,$$

et le même raisonnement prouve que $\forall x \in]0,+\infty[$, $|xL'(x)| \leqslant M'$.

$$\boxed{\text{Les fonctions } x \mapsto |xL'(x)| \text{ et } x \mapsto |xL(x)| \text{ sont majorées sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Les majorations $\forall x \in]0,\infty[$, $|L(x)| \leqslant \dfrac{M}{x}$ et $|L'(x)| \leqslant \dfrac{M'}{x}$ prouvent alors par encadrement que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} L'(x) = \lim_{x\to+\infty} L(x) = 0.}$$

Q7. Pour tout réel $x > 0$, on a (la convergence de chacune des intégrales écrites ci-dessous justifie le calcul, on a en effet $|e^{(i-x)t}| = e^{-xt}$ d'où la convergence absolue) :

$$\begin{aligned}
L''(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,\mathrm{d}t - \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}\,\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{1}{x} - \mathrm{Re}\left[\frac{1}{-x+i}e^{it}e^{-xt}\right]_0^{+\infty}\\
&= \frac{1}{x} + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{-x+i}\right) \quad \left(t \mapsto e^{it} \text{ est bornée donc } \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{-x+i}e^{it}e^{-xt} = 0\right)\\
&= \frac{1}{x} + \mathrm{Re}\left(\frac{-x-i}{x^2+1}\right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]0,+\infty[, \ L''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.}$$

Q8. D'après la formule ci-dessus, il existe une constante $c' \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad L'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c' = -\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + c'.$$

Comme on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} L'(x) = 0$, on en déduit que $c' = 0$, donc que

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad L'(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$$

Notons $h : x \mapsto -\dfrac{x}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) - \arctan(x)$.
La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x > 0$:

$$h'(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{x}{2}\left(\frac{-2}{x^3}\right)\frac{x^2}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = -\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = L'(x).$$

On en déduit qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad L(x) = -\frac{x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \arctan(x) + c.$$

Comme $-\dfrac{x}{2}\ln(1+\dfrac{1}{x^2}) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{x}{2}\dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{1}{2x}$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} L(x) = -\dfrac{\pi}{2} + c$.
Comme on sait par ailleurs que $\lim\limits_{x\to+\infty} L(x) = 0$, on conclut que $c = \dfrac{\pi}{2}$, donc que :

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[, \quad L(x) = -\frac{x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2}.}$$

Comme la fonction L est continue en zéro, on obtient, en prenant la limite du membre de droite en zéro, que $L(0) = \dfrac{\pi}{2}$.
En utilisant le définition de la fonction L, on trouve finalement que :

$$\boxed{L(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = K = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} = \frac{\pi}{2}.}$$

Q9. La fonction $m : u \mapsto \dfrac{\ln(u)}{u-1}$ est continue par morceaux sur $]0,1[$.
⋆ On a $|m(u)| \underset{u\to0}{\sim} -\ln(u)$.
Comme pour tout $u \in]0,1[$, $-\ln(u) \geqslant 0$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(u)\mathrm{d}u$ converge (par le cours), on en déduit par comparaison que m est intégrable en 0.
⋆ On a $|m(u)| = \dfrac{\ln(1+u-1)}{u-1} \underset{u\to1}{\sim} \dfrac{u-1}{u-1} = 1$.
La fonction m est donc prolongeable par continuité en 1 donc elle est intégrable en 1.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } u \mapsto \frac{\ln(u)}{u-1} \text{ est intégrable sur }]0,1[.}$$

Q10. Soit $k \in \mathbb{N}$.
La fonction $m_k : u \mapsto u^k \ln(u)$ est continue par morceaux sur $]0,1]$. On a par intégration par parties (les fonctions en jeu sont bien de classe $\mathcal{C}^1$) pour tout $\varepsilon \in]0,1]$:

$$\int_\varepsilon^1 u^k \ln(u)\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^{k+1}\ln(u)}{k+1}\right]_\varepsilon^1 - \frac{1}{k+1}\int_\varepsilon^1 u^k\,\mathrm{d}u = \frac{\varepsilon^{k+1}\ln(\varepsilon)}{k+1} - \frac{1-\varepsilon^{k+1}}{(k+1)^2} \underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow} -\frac{1}{(k+1)^2}$$

par croissances comparées.
Ainsi :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^1 u^k \ln(u)\,\mathrm{d}u \text{ converge et a pour valeur } \int_0^1 u^k \ln(u)\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{(k+1)^2}.}$$

Q11. La somme de la série géométrique $\forall u \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{1-u} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u^k$ permet d'écrire que

$$\forall u \in]0,1[, \quad m(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} m_k(u), \quad \text{où} \quad m_k(u) = u^k\ln(u).$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme.

$\boxed{1}$ La série de fonctions $\sum_{k\geqslant0} m_k$ converge simplement sur $]0,1[$.

$\boxed{2}$ D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction m_k est intégrable sur $]0,1[$ (puisqu'elle est de signe constant sur $]0,1[$ donc son intégrale sur $]0,1[$ est absolument convergente).

$\boxed{3}$ La série numérique de terme général $\displaystyle\int_0^1 |m_k(u)|\,du$ converge puisqu'il s'agit de la série de terme général $\dfrac{1}{(k+1)^2}$ (série de Riemann avec $2 > 1$ après glissement d'indice).

On en déduit que m est intégrable sur $]0,1[$ (on le savait déjà) et on a l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} m_k(u)\right)\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 m_k(u)\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)^2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k)^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Q12. Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux, définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans le corps $\mathbb{K}$ des réels ou des complexes.

On suppose que :

$\boxed{1}$ La suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f (continue par morceaux sur I).

$\boxed{2}$ Il existe une fonction φ intégrable sur I telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \forall t \in I,\quad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t).$$

Alors f et les f_n sont intégrables sur I, la suite de terme général $\int_I f_n$ converge, et on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n = \int_I f.$$

Q13. On applique le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions (f_n) définies par $\forall t \in [0,1[,\ f_n(t) = f(t^n)$.

$\boxed{1}$ Soit $t \in [0,1[$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} t^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(t^n) = f(0)$ par continuité de f en 0.

Ainsi, la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction constante $f : t \mapsto f(0)$

$\boxed{2}$ Comme f est continue sur le segment $[0,1]$, elle y est bornée.

La fonction constante $\varphi = \|f\|_\infty^{[0,1]}$ est continue par morceaux sur $[0,1]$ et donc intégrable sur $[0,1[$ et elle vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1[,\ |f_n(t)| \leqslant \varphi(t) \text{ (puisque } t^n \in [0,1]).$$

On en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 f(0)\,\mathrm{d}t = f(0).}$$

Q14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose le changement de variable $t = u^{1/n}$ dans l'intégrale convergente $\displaystyle\int_0^1 f(t^n)\mathrm{d}t$ (car $t \mapsto f(t^n)$ est continue sur le segment $[0,1]$). On obtient une nouvelle intégrale qui est aussi convergente et de même valeur.

On a alors :

$$\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 f(u)u^{-1+1/n}\,\mathrm{d}u,\quad \text{ou encore}\quad nI_n = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}u^{1/n}\,\mathrm{d}u.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n : u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}u^{1/n}$.

Vérifions les hypothèses du théorème de convergence dominée.

$\boxed{1}$ Soit $u \in]0,1]$.

Comme $u^{1/n} = \exp(\frac{\ln(u)}{n})$ tend vers 1 quand $n \to +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(u) = \dfrac{f(u)}{u}$.

Ainis, la suite (g_n) converge simplement sur $]0,1]$ vers la fonction $g : u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$.

$\boxed{2}$ On dispose de l'hypothèse de domination $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \in]0,1], \ |g_n(u)| \leqslant |g(u)|$ car $0 \leqslant u^{1/n} \leqslant 1$.
Or, $|g|$ est intégrable sur $]0,1]$ par hypothèse (puisque g l'est).
On conclut que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} nI_n = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u.}$$

Q15. La question précédente (applicable puisque le sinus est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ converge absolument) donne :

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 \sin(t^n)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

On remarque que $u \mapsto \dfrac{\sin u}{u}$ est continue et positive, non identiquement nulle sur $]0,1]$ et donc son intégrale est strictement positive donc n'est pas nulle.
Ainsi :

$$\boxed{\int_0^1 \sin(t^n)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u.}$$

Problème 2 Extrait Centrale PC 2016

Q16. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est donc généralisée en 0 et en $+\infty$.
Étude en 0 : On a $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to0^+}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$.
Pour tout $t \in]0,1]$, on a $\dfrac{1}{t^{1-x}} \geqslant 0$.
Ainsi, par comparaison par équivalent, les intégrales $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
On sait que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $1-x<1$ c'est-à-dire $x>0$.
Étude en $+\infty$: On a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0$ donc $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
Pour tout $t \in [1,+\infty[$, $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$.
L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge car $2>1$.
Ainsi, par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.
On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x>0$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } \Gamma \text{ a pour domaine de définition } \mathscr{D} =]0,+\infty[.}$$

Q17. Soit $x \in]0,+\infty[$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0<a<b<+\infty$.
Les fonctions $t \mapsto -e^{-t}$ et $t \mapsto t^x$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ donc on a par intégration par parties :

$$\int_a^b t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = [-e^{-t}t^x]_a^b + x\int_a^b t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

On a $\displaystyle\lim_{a\to0^+}(-e^{-a}a^x) = 0$ (car $x>0$) et $\displaystyle\lim_{b\to0^+}(-e^{-b}b^x) = 0$ par croissances comparées.
Comme les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t$ convergent, on obtient par passage à la limite dans l'égalité obtenue ($a\to0^+$ et $b\to+\infty$) :

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$$

Soit $x \in]0,+\infty[$. Par récurrence, on montre alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\Gamma(x+n) = (x+n-1)\cdots(x+1)x\Gamma(x) = \Gamma(x)\prod_{k=0}^{n-1}(x+k).}$$

On a $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^0 e^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to+\infty}[-e^{-t}]_0^b = 1$.
On a alors par la formule précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n+1) = \Gamma(1)\prod_{k=0}^{n-1}(k+1) = n!.$$

Cette formule est également valable pour $n = 0$.
On en déduit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!}$$

Q18. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$.
La fonction $\varphi : t \mapsto t^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc le changement de variable $u = t^2$ est licite. On a $\mathrm{d}u = 2t\mathrm{d}t$ et $t = \sqrt{u}$.
Lorsque $t = 0$, on a $u = 0$ et lorsque $t \to +\infty$, on a $u \to +\infty$.
On en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t}2t\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et de même valeur en cas de convergence.
Or, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{1/2-1}\,\mathrm{d}u$ converge (car $\frac{1}{2} > 0$) et vaut $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ et vaut } \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right).}$$

De même, on effectue le changement de variable $u = t^4$ (licite car la fonction $t \mapsto t^4$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $[0,+\infty[$) dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^4}\,\mathrm{d}t$.
On obtient :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-t^4}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^4}}{4t^3}4t^3\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } \int_0^{+\infty} e^{-t^4}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{4u^{3/4}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}$$

Q19. Soit $t \in]0,+\infty[$.
Si $t \in]0,1]$ alors $\ln t \leqslant 0$ et on a pour tout $x \in [a,b]$, $e^{b\ln t} \leqslant e^{x\ln t} \leqslant e^{a\ln t}$.
Si $t \in]1,+\infty[$ alors $\ln t > 0$ et on a pour tout $x \in [a,b]$, $e^{a\ln t} \leqslant e^{x\ln t} \leqslant e^{b\ln t}$.
Ainsi pour tout $x \in [a,b]$, on a $t^x \leqslant \max(t^a,t^b)$.
Comme $t^a \geqslant 0$ et $t^b \geqslant 0$, on a $t^a \leqslant t^a + t^b$ et $t^b \leqslant t^a + t^b$.
Ainsi, $\max(t^a,t^b) \leqslant t^a + t^b$.
On a donc :

$$\boxed{\text{pour tout } t > 0, \text{ pour tout } x \in [a,b],\ t^x \leqslant \max(t^a,t^b) \leqslant t^a + t^b}$$

Q20. $\star$ Commençons par prouver ce résultat utile pour la suite : pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto (\ln t)^\ell t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
Soit $\ell \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,+\infty[$.
La fonction $t \mapsto (\ln t)^\ell t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
On a $\lim_{t\to+\infty} |\ln t|^\ell t^{x+1}\mathrm{e}^{-t} = 0$ par croissances comparées donc $|\ln t|^\ell t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
Comme pour tout $t \in [1,+\infty[$, on a $\frac{1}{t^2} \geqslant 0$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (car $2 > 1$), on en déduit

que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} |\ln t|^\ell t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.
On a $\lim\limits_{t\to 0} |\ln t|^\ell t^{x/2}\mathrm{e}^{-t} = 0$ par croissances comparées (car $x/2 > 0$) donc $|\ln t|^\ell t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{1-x/2}}\right)$.
Comme pour tout $t \in]0,1]$, on a $\dfrac{1}{t^{1-x/2}} \geqslant 0$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x/2}}\,\mathrm{d}t$ converge (car $1 - x/2 < 1$), on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 |\ln t|^\ell t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.
On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\ln t|^\ell t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.
$\star$ Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrons que la fonction Γ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $]0,+\infty[$ et déterminons $\Gamma^{(k)}$.
On pose pour tout $x \in]0,+\infty[$ et pour tout $t \in]0,+\infty[$, $f(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(x-1)\ln t - t}$.
$\boxed{1}$ Soit $t \in]0,+\infty[$. La fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $]0,+\infty[$ et on a pour tout $\ell \in [\![1,k]\!]$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\frac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell}(x,t) = (\ln t)^\ell t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \text{ (expression valable pour } \ell = 0).$$

$\boxed{2}$ Soit $\ell \in [\![0,k-1]\!]$. Soit $x \in]0,+\infty[$.
D'après ce qui précède, la fonction $t \mapsto (\ln t)^\ell t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
$\boxed{3}$ Soit $t \in]0,+\infty[$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$. Soit $x \in [a,b]$. On a :

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant |\ln t|^k t^{a-1}\mathrm{e}^{-t} + |\ln t|^k t^{b-1}\mathrm{e}^{-t} \quad \text{(ne dépend pas de } x\text{) car } t^x \leqslant t^a + t^b \text{ d'après 4.a).}$$

D'après ce qui précède, comme $a > 0$ et $b > 0$, les fonctions $t \mapsto |\ln t|^\ell t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}$ et $t \mapsto |\ln t|^\ell t^{b-1}\mathrm{e}^{-t}$ sont intégrables sur $]0,+\infty[$.
Donc par somme, la fonction $t \mapsto |\ln t|^k t^{a-1}\mathrm{e}^{-t} + |\ln t|^k t^{b-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
Ainsi, par le théorème de classe $\mathscr{C}^k$ des intégrales à paramètre, on en déduit que pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,+\infty[$, la fonction $\Gamma_{|[a,b]}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $[a,b]$ et on peut dériver sous l'intégrale sur $[a,b]$ et comme la classe $\mathscr{C}^k$ est une propriété locale, on obtient que la fonction Γ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$: $\Gamma^{(k)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.
Comme Γ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $]0,+\infty[$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } \Gamma \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et pour tout } k \in \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } x \in]0,+\infty[: \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.}$$

Q21. D'après **Q17.**, on a $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$.
Comme la fonction Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,2]$ (et donc continue sur $[1,2]$ et dérivable sur $]1,2[$), on en déduit par le théorème de Rolle que la fonction Γ s'annule sur $]1,2[$.
Soit $x \in]0,+\infty[$.
La fonction $t \mapsto (\ln t)^2 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$ et elle prend une valeur strictement positive en $\frac{1}{2}$ par exemple donc par stricte positivité de l'intégrale, on a $\Gamma''(x) > 0$.
Par suite, la fonction Γ' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } \Gamma' \text{ s'annule en un unique réel } \xi \text{ et sa partie entière est égale à 1.}}$$

Q22. La fonction Γ' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et s'annule en ξ donc pour tout $x \in]0,\xi[$, $\Gamma'(x) < 0$ et pour tout $x \in]\xi,+\infty[$, $\Gamma'(x) > 0$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } \Gamma \text{ est strictement décroissante sur }]0,\xi] \text{ et strictement croissante sur } [\xi,+\infty[.}$$

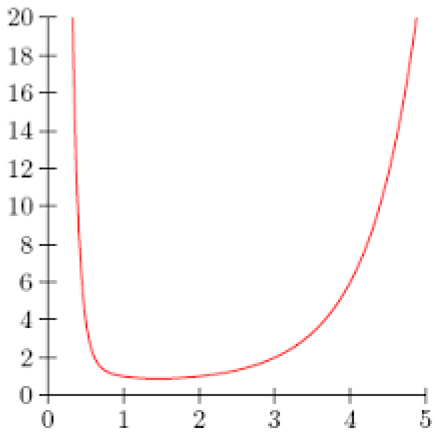
Par ailleurs, on a pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
Par continuité de Γ en 1, on a $\lim\limits_{x\to 0}\Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1$ et donc $\Gamma(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+}\Gamma(x) = +\infty$.

Puisque Γ est croissante sur $[\xi, +\infty[$, la fonction Γ admet une limite en $+\infty$.
De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \Gamma(n+1) = \lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to0^+} \Gamma(x) = \lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty.}$$

On sait que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ donc par dérivation, $\Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x)$.
On a donc pour tout $x \in]0, +\infty[$, $x^2\Gamma'(x) = x\Gamma'(x+1) - x\Gamma(x)$.
Par continuité de Γ' en 1, on a $\lim\limits_{x\to0^+} x\Gamma'(x+1) = 0$ et comme $\Gamma(x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{1}{x}$, on a $\lim\limits_{x\to0^+} x\Gamma(x) = 1$.
Par suite, $\lim\limits_{x\to0^+} x^2\Gamma'(x) = -1$ donc $\Gamma'(x) \underset{x\to0}{\sim} -\dfrac{1}{x^2}$. On a donc $\lim\limits_{x\to0^+} \Gamma'(x) = -\infty$.
Pour tout $x \in [\xi, +\infty[$, on a $\Gamma'(x) \geqslant 0$ donc $\Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x) \geqslant \Gamma(x)$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$, par inégalité, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \Gamma'(x+1) = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \Gamma'(x) = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to0^+} \Gamma'(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \Gamma'(x) = +\infty}$$



Q23. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in]0, +\infty[$, $g(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{-3/4}\mathrm{e}^{itx}$.

$\boxed{1}$ Soit $t \in]0, +\infty[$. La fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t) = (it)^k \mathrm{e}^{-t} t^{-3/4} \mathrm{e}^{ixt} \text{ (formule valable aussi pour } k = 0).$$

$\boxed{2}\boxed{3}$ Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
La fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ et on a pour tout $t \in]0, +\infty[$:

$$\left|\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\right| = t^{k-3/4}\mathrm{e}^{-t} = t^{k+1/4-1}\mathrm{e}^{-t}.$$

D'après ce qui précède, la fonction $t \mapsto t^{k+1/4-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car $k + 1/4 > 0$.
Cela prouve l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)$ sur $]0, +\infty[$ et l'hypothèse de domination puisque cette fonction ne dépend pas de x.

Par le théorème de dérivation sous le signe intégral, on en déduit :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{la fonction } F \text{ est définie et de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \\ \text{et pour tout } k \in \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R},\ F^{(k)}(x) = i^k \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{k-3/4}\mathrm{e}^{ixt}\,\mathrm{d}t. \\ \text{On a de plus } F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{1/4-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma\left(\frac{1}{4}\right). \end{array}}$$

Q24. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par le développement en série entière de la fonction exponentielle complexe, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{itx} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(itx)^n}{n!}.$$

Ainsi, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{-3/4} \frac{(itx)^n}{n!} \mathrm{d}t$.

Appliquons le théorème d'intégration terme à terme pour la série de fonction $\sum f_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est la fonction définie par : $\forall t \in]0, +\infty[$, $f_n(t) = \mathrm{e}^{-t} t^{-3/4} \dfrac{(ixt)^n}{n!}$ (x fixé).

$\boxed{1}$ Soit $t \in]0, +\infty[$. Par ce qui précède, la série $\sum f_n(t)$ converge et sa somme vaut $S(t) = \mathrm{e}^{-t} t^{-3/4} \mathrm{e}^{itx}$. Donc la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

$\boxed{2}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
On a pour tout $t \in]0, +\infty[$, $|f_n(t)| = \dfrac{|x|^n}{n!} t^{n+1/4-1} \mathrm{e}^{-t}$.
La fonction f_n est donc intégrable sur $]0, +\infty[$ puisque $n + 1/4 > 0$ ($\dfrac{|x|^n}{n!}$ est ici une constante).

$\boxed{3}$ De plus, pour tout $n \geqslant 2$, on a par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} |f_n(t)| \,\mathrm{d}t = \frac{|x|^n}{n!} \int_0^{+\infty} t^{n+1/4-1} \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t = \frac{|x|^n}{n!} \Gamma(n + 1/4) \leqslant \frac{|x|^n}{n!} \Gamma(n+1) = |x|^n$$

en utilisant le fait que la fonction Γ est croissante sur $[2, +\infty[$ et $\Gamma(n+1) = n!$.
Ainsi, si $x \in]-1, 1[$ alors la série géométrique $\sum |x|^n$ converge et donc par comparaison par inégalité, la série $\sum \displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)| \,\mathrm{d}t$ converge.

Par le théorème d'intégration terme à terme, on en déduit :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{pour tout } x \in]-1, 1[\text{, on a } F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(ix)^n}{n!} \text{ avec } \forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \int_0^{+\infty} t^{n+1/4-1} \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t = \Gamma(n + 1/4). \\ \text{Par } \mathbf{Q17}\text{, on obtient } c_n = \Gamma\left(\dfrac{1}{4}\right) \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(k + \frac{1}{4}\right) = c_0 \prod_{k=0}^{n-1} \left(k + \frac{1}{4}\right). \end{array}}$$

La fonction Γ est croissante sur $[2, +\infty[$ donc pour tout $n \geqslant 2$, on a :

$$\frac{1}{n} = \frac{\Gamma(n)}{n!} \leqslant \left| c_n \frac{i^n}{n!} \right| = \frac{\Gamma(n + 1/4)}{n!} \leqslant \frac{\Gamma(n+1)}{n!} = 1.$$

On en déduit que $c_n \dfrac{i^n}{n!} = O(1)$ et $\dfrac{1}{n} = O\left(c_n \dfrac{i^n}{n!}\right)$.

Comme les séries entières $\sum x^n$ et $\sum \dfrac{1}{n} x^n$ ont le même rayon de convergence qui est 1, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série entière } \sum c_n \frac{(ix)^n}{n!} \text{ a pour rayon de convergence 1.}}$$

Q25. On a pour tout $n \geqslant 2$, $0 \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \left| c_n \dfrac{i^n}{n!} \right|$.

Or, la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge donc par comparaison, la série $\sum \left| c_n \dfrac{i^n}{n!} \right|$ diverge.

Ainsi :

$$\boxed{\text{il n'y a pas convergence absolue pour } |x| = 1.}$$

Q26. On a pour tout $x\in]-1,1[$, $F(x)=\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}c_{2n}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}}_{R(x)}+i\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}c_{2n+1}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{I(x)}$.

Les développements en série entière de R et I donnent leurs développements limités en 0 :

$$R(x)=c_0-\frac{1}{2}c_2x^2+\underset{x\to0}{o}(x^3)\;\text{ et }\;I(x)=c_1x-\frac{1}{6}c_3x^3+\underset{x\to0}{o}(x^4)$$

Comme $c_1=\frac{1}{4}c_0$, $c_2=\frac{5}{16}c_0$ et $c_3=\frac{45}{64}c_0$, on obtient :

$$\boxed{R(x)=c_0\left(1-\frac{5}{32}x^2\right)+\underset{x\to0}{o}(x^3)\;\text{ et }\;I(x)=c_0\left(\frac{1}{4}x-\frac{15}{128}x^3\right)+\underset{x\to0}{o}(x^4)}$$

Q27. On a pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=i\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{1/4}e^{(ix-1)t}\,dt$.
Soit $(a,b)\in]0,+\infty[^2$ avec $0<a<b$.
Les fonctions $t\mapsto t^{1/4}$ et $t\mapsto\dfrac{1}{ix-1}e^{(ix-1)t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ donc par intégration par parties, on a :

$$\int_a^b t^{1/4}e^{(ix-1)t}\,dt=\left[\frac{1}{ix-1}e^{(ix-1)t}t^{1/4}\right]_a^b-\frac{1}{4(ix-1)}\int_a^b t^{-3/4}e^{(ix-1)t}\,dt$$

On a $\displaystyle\lim_{a\to0}\frac{1}{ix-1}e^{(ix-1)a}a^{1/4}=0$ et $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{ix-1}e^{(ix-1)b}b^{1/4}=0$ car $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\left|\frac{1}{ix-1}e^{(ix-1)b}b^{1/4}\right|=\lim_{b\to+\infty}\left|\frac{1}{ix-1}\right|e^{-b}b^{1/4}=0$ par croissances comparées.
On en déduit par passage à la limite ($a\to0^+$ et $b\to+\infty$) et multiplication par i :

$$F'(x)=-\frac{i}{4(ix-1)}F(x).$$

Ainsi :

$$\boxed{F\text{ vérifie sur }\mathbb{R}\text{ l'équation différentielle }F'+AF=0\text{ avec }A:x\mapsto\frac{i}{4(ix-1)}=\frac{1}{4(x+i)}=\frac{x-i}{4(x^2+1)}.}$$

Q28. Soit φ la fonction définie par : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi(x)=-\dfrac{1}{8}\ln(1+x^2)+\dfrac{i}{4}\arctan x$.
La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\varphi'(x)=-\frac{1}{8}\frac{2x}{1+x^2}+\frac{i}{4}\frac{1}{1+x^2}=\frac{-x+i}{4(1+x^2)}=-A(x).$$

Par suite, la fonction φ est une primitive de $-A$ sur $\mathbb{R}$.
On en déduit qu'il existe $C\in\mathbb{C}$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F(x)=Ce^{\varphi(x)}=C(1+x^2)^{-1/8}e^{i/4\arctan x}$.
On a $C=F(0)=\Gamma(1/4)$ d'où :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\;F(x)=\Gamma(1/4)(1+x^2)^{-1/8}e^{\frac{i}{4}\arctan x}.}$$