DM10 (Espaces probabilisés)
À rendre le vendredi 9 février

Problème 1 (sujet CCINP) - Les urnes de Pólya

On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher.

On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

1. si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire ;
2. si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par A_n l'événement « la boule tirée au n-ième tirage est blanche ».
Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, on note $B_{n,k}$ l'événement « le nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du n-ième tirage est égal à k ».

On rappelle que si E et F sont deux événements avec $P(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $P(E|F)$ ou $P_F(E)$) par :

$$P(E|F) = P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

Partie I - Préliminaires

1. Déterminer la probabilité de A_1.
2. Déterminer la probabilité conditionnelle de A_2 sachant A_1.
   En déduire la probabilité de A_2.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelles sont les valeurs de $k \in \mathbb{N}$ pour lesquelles $P(B_{n,k}) > 0$?

Partie II - Probabilité de tirer une boule blanche à un tirage donné

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Pour tout $k \in [\![b, n+b]\!]$, calculer $P(A_{n+1}|B_{n,k})$.
5. À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier que :

$$P(A_{n+1}) = \frac{1}{b+r+n} \sum_{k=b}^{n+b} k P(B_{n,k}).$$

Partie III - Étude d'un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $b = r = 1$ et on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Exprimer l'événement $B_{n,1}$ avec les événements $\overline{A_k}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.
8. Montrer que $P(B_{n,1}) = \dfrac{1}{n+1}$.

On admet dans la suite que l'on a de même $P(B_{n,n+1}) = \dfrac{1}{n+1}$.

9. Soit $(k, \ell) \in [\![1, n+2]\!] \times [\![1, n+1]\!]$.
   Calculer la probabilité $P(B_{n+1,k}|B_{n,\ell})$ dans chacun des trois cas suivants :
$$(i)\ \ell \notin \{k-1, k\}, \qquad (ii)\ \ell = k-1, \qquad (iii)\ \ell = k.$$
10. Montrer que pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, on a la relation :
$$P(B_{n+1,k}) = \frac{k-1}{n+2} P(B_{n,k-1}) + \frac{n+2-k}{n+2} P(B_{n,k}).$$
11. Montrer par récurrence que pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, on a $P(B_{n,k}) = \dfrac{1}{n+1}$.
12. En déduire $P(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie IV - Cas général (facultatif)

On revient au cas général avec b et r quelconques dans $\mathbb{N}^*$ et on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

13. Soit $k \in [\![b+1, n+b-1]\!]$. Déterminer la probabilité de l'événement $P\left(\bigcap_{i=1}^{k-b} A_i \cap \bigcap_{i=k-b+1}^{n} \overline{A_i}\right)$.
14. En déduire que pour tout $k \in [\![b, n+b]\!]$:
$$P(B_{n,k}) = \binom{n}{k-b} \frac{br}{k(b+r)} \frac{\binom{b+r}{b}}{\binom{b+r+n-1}{k}}.$$

Problème 2 (sujet Centrale)

Les deux parties sont indépendantes.

I. Étude de sommes doubles

On considère dans cette partie des familles de nombres réels indexées par $\mathbb{N}^2$ c'est-à-dire du type $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$.

Dans ce contexte, on se demande s'il est possible de définir les quantités $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$ et $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}$ et si ces quantités, lorsquelles sont définies, sont nécessairement égales.

On rappelle et on admet les deux résultats suivants.

• Si $a_{i,j} \geqslant 0$ pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, alors les deux sommes $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$ et $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}$ existent dans $[0, +\infty]$ et sont égales. En particulier (cas d'une famille sommable de réels positifs), si l'une des sommes est finie, l'autre aussi et elles sont égales.

• (Cas d'une famille sommable de réels quelconques.) Si $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille de nombres réels telle que la somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} |a_{i,j}|$ est finie, alors les sommes $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$ et $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}$ existent et sont égales.

I.A - Application

I.A.1) Une première application

Soit $x \in \,]-1,1[$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{nx^n}{1-x^n}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} nx^{n(1+k)}$.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 1} \frac{x^p}{(1-x^p)^2}$ converge et que sa somme est égale à celle de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{nx^n}{1-x^n}$.

I.A.2) Une deuxième application

On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

3. Montrer que l'on peut définir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle u_n = n\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3(k+1)}$.
4. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et calculer sa somme.

I.B - Contre-exemples

I.B.1) Un premier contre-exemple

On considère la famille $(b_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définie, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, par $b_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j, \\ -1 & \text{si } i = j, \\ \frac{1}{2^{j-i}} & \text{si } i < j. \end{cases}$

5. Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}$ et calculer sa valeur.
6. Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$ et calculer sa valeur.
7. A-t-on $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$?

I.B.2) Un deuxième contre-exemple

On considère la famille $(c_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définie, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, par $c_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j, \\ j & \text{si } i = j, \\ -2i\,3^{i-j} & \text{si } i < j. \end{cases}$

8. Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j}$ et calculer sa valeur.
9. Soit $j \in \mathbb{N}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{i\geqslant 0} c_{i,j}$ converge et que $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = \frac{1}{2}\,\frac{3^j-1}{3^{j-1}}$.
10. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0}\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j}$?

II. Probabilités - Pile ou face infini

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires considérées sont des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
La lettre p désigne un nombre réel de l'intervalle $]0,1[$.

On considère la répétition infinie du lancer d'une pièce dont la probabilité de « faire pile » est p. Pour modéliser cette expérience, on admet que l'on peut définir une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[X_n = 1]$ désigne l'événement « le n-ième lancer donne pile » et $[X_n = 0]$ désigne l'événement « le n-ième lancer donne face ».
Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit A_n et B_n par
— A_n : « à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a autant de piles que de faces » ;
— B_n : « à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a pour la première fois autant de piles que de faces ».

Par exemple si les six premiers lancers donnent dans l'ordre (face, face, pile, pile, face, pile), A_1 nest pas réalisé mais A_2 et A_3 le sont, B_2 est réalisé mais B_1 et B_3 ne le sont pas.

Enfin on définit C, « au bout dun certain nombre (non nul) de lancers, il y a autant de piles que de faces ».

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n et B_n sont des événements.

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer A_n à l'aide de la variable aléatoire $X_1 + \ldots + X_{2n}$ et en déduire $P(A_n)$.
12. Montrer que les événements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont incompatibles.
13. Montrer que C est un événement et que $P(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n)$.
14. On pose $A_0 = \Omega$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A_{n-k})$.
15. On admet (*cf DM7*) que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}.$$
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$P(B_n) = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}\big(p(1-p)\big)^n.$$
16. On admet (*cf DM7*) que pour tout $x \in]-1/4, 1/4[\smallsetminus\{0\}$,
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^n}{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$
On suppose que $p \neq \frac{1}{2}$, montrer que $P(C) = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)}$.
17. On suppose que $p = \frac{1}{2}$, montrer que $P(C) = 1$.