

---

## VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

### *Exercices*

---

**1** Soit  $\lambda \in ]0, +\infty[$ . Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . Déterminer la probabilité que la valeur prise par  $X$  soit paire.

---

**2** Lors d'une rencontre d'athlétisme, la barre est montée d'un cran après chaque saut réussi par le concurrent. Quand un saut est raté, la compétition s'arrête pour le sauteur. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'athlète a, pour le saut  $n$ , une chance sur  $n$  de réussir le saut. Soit  $X$  le rang du dernier saut réussi. Par convention,  $X$  prend la valeur 0 lorsque l'athlète ne rate aucun saut.

1. Quelle est la loi de  $X$  ?
  2.  $X$  admet-elle une espérance ? une variance ? Si oui, les déterminer.
- 

**3** Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ . Une urne contient  $n$  boules indiscernables au toucher, deux sont blanches et les autres sont noires. On tire une à une, et sans remise, les  $n$  boules de l'urne. Soit  $X$  la variable aléatoire égale au rang de la première boule blanche tirée.

1. Déterminer la loi de  $X$ , son espérance et sa variance.
  2. Mêmes questions si les tirages sont faits avec remise.
- 

**4** *Calculs d'espérance*

1. Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  (où  $\lambda > 0$ ). Justifier l'existence et calculer  $E\left(\frac{1}{X+1}\right)$ .
  2. Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur  $[[0, n]]^2$  (où  $n \in \mathbb{N}^*$ ). Calculer  $E(X+Y)$ .
- 

**5** *Ruine du joueur*

On suppose qu'une roulette de Casino contient autant de secteurs noirs que de secteurs rouges (et il n'y a pas de secteur vert).

Un joueur joue selon le protocole suivant :

- il mise initialement un euro sur la couleur noire,
- s'il gagne, il arrête de jouer et empoche le double de sa mise,
- s'il perd, il double sa mise et rejoue.

1. On suppose que la fortune du joueur est infinie. Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement. Déterminer l'espérance du gain du joueur.
2. On suppose toujours la fortune du joueur infinie. Quelle est l'espérance du gain si au lieu de doubler sa mise lorsqu'il rejoue, il la triple ?
3. Le joueur ne possède en fait que  $2^n - 1$  euros ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). Quelle est son espérance de gain ?

**6** On lance cinq dés. Après ce premier lancer, les dés qui ont donné un *As* sont mis de côté, les autres sont relancés. On procède ainsi jusqu'à l'obtention des cinq *As*.

On note  $T$  la variable aléatoire déterminant le nombre de lancers nécessaires.

1. Calculer  $P(T \leq n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , on pourra noter  $X_i$  la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour que le  $i$ ème dé donne un *As*.

2. En déduire que  $T$  admet une espérance et déterminer celle-ci.

---

**7** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $p \in ]0, 1[$ .

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On suppose qu'il existe un réel  $a$  tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = a \binom{n+k}{k} p^k.$$

1. Montrer que pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on a  $\sum_{\ell=n}^{+\infty} \ell(\ell-1) \dots (\ell-n+1) x^{\ell-n} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ .

2. Déterminer  $a$ .

3. Déterminer la fonction génératrice de  $X$ .

4. Montrer que  $X$  admet une espérance et une variance et les calculer.

---

**8** On considère une urne contenant des boules blanches en proportion  $p$  et des boules noires en proportion  $1-p$ . On effectue  $n$  tirages successifs avec remise d'une boule et on observe l'apparition de  $k$  boules blanches. On décide d'estimer la proportion  $p$  par le nombre  $\frac{k}{n}$ .

Comment étudier la fiabilité de cette estimation ?

---

**9** Soit le réel  $p \in ]0, 1[$ . Un mobile se déplace aléatoirement sur le demi-axe des abscisses, côté  $x \geq 0$ . A l'instant initial  $t = 0$ , il est à l'origine. Si le mobile est au point d'abscisse  $k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) à l'instant  $n$ , alors il sera, à l'instant  $n+1$ , soit au point d'abscisse  $k+1$  avec une probabilité  $p$ , soit à l'origine, avec une probabilité  $1-p$ . On note  $X_n$  la v.a.r. égale à l'abscisse du mobile à l'instant  $n$ .

1. Donner la loi de  $X_0$  et celle de  $X_1$ .

2. Montrer par récurrence que  $X_n(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ .

3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, P(X_n = k) = p P(X_{n-1} = k-1)$$

4. En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, E(X_n) = p E(X_{n-1}) + p$ .

5. En déduire l'expression de  $E(X_n)$  en fonction de  $n$  et de  $p$ .

---

**10** Soit  $N$  la variable aléatoire donnant le nombre d'œufs pondus par une poule.

On suppose que  $N$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

La probabilité pour qu'un œuf éclore est  $p \in ]0, 1[$ .

On note  $D$  la variable aléatoire donnant le nombre de descendants d'une poule.

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Reconnaître la loi conditionnelle de  $D$  sachant  $[N = n]$ .

2. Déterminer la loi de  $D$ .

3. Les variables aléatoires  $D$  et  $N$  sont-elles indépendantes ? Qu'en est-il de  $N - D$  et  $D$  ?

4. Retrouver la loi de  $N$  à partir de celles de  $N - D$  et  $D$ .

**11** Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et  $p \in ]0, 1[$ .

On suppose que la loi conjointe de  $X$  et  $Y$  vérifie :

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, P(X = k, Y = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} a^n p(1-p)^n & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer la valeur de  $a$ .
2. Déterminer la loi de  $X$  et de  $Y$ .
3. Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

**12** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in ]0, 1[$ .

On tire  $n$  boules dans une urne contenant  $N$  boules dont des boules blanches, initialement en proportion  $p$ , et des boules noires, initialement en proportion  $q = 1 - p$ .

On note  $X$  le nombre de boules blanches obtenues.

1. On suppose que les tirages se font avec remise.  
Déterminer la loi de  $X$ , son espérance et sa variance.
2. On suppose désormais que les tirages se font sans remise.  
On numérote les boules blanches de 1 à  $Np$ . Pour tout  $k \in \{1, \dots, Np\}$ , on note  $X_k$  la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numéro  $k$  est obtenue lors des  $n$  tirages, et 0 sinon.
  - (a) Exprimer  $X$  en fonction de  $X_1, \dots, X_{Np}$  et en déduire l'espérance de  $X$ .
  - (b) Déterminer pour tout couple  $(i, j) \in \{1, \dots, Np\}^2$  avec  $i \neq j$  la covariance de  $X_i$  et  $X_j$ .  
En déduire la variance de  $X$ .

**13** Soit  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes.

On suppose que  $X$  suit la loi  $\mathcal{B}(m, p)$  et  $Y$  la loi  $\mathcal{B}(n, p)$ .

Déterminer la loi de  $X + Y$ .

Généralisation à  $n$  variables indépendantes où pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $X_i \sim \mathcal{B}(m_i, p)$ .

**14** On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit une *loi binômiale négative* de paramètres 2 et  $p \in ]0, 1[$  et on note  $X \sim BN(2, p)$  lorsque :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \quad \text{et} \quad \forall k \in X(\Omega), P(X = k) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}.$$

1. Déterminer la fonction génératrice de la loi  $BN(2, p)$ .
2. Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes qui suivent chacune la loi géométrique de paramètre  $p$ .
  - (a) Montrer que  $X + Y$  suit la loi binômiale négative de paramètres 2 et  $p$ .
  - (b) En déduire l'espérance et la variance d'une loi binômiale négative de paramètres 2 et  $p$ .
3. On réalise une suite infinie d'expériences de Bernoulli indépendantes de même probabilité de succès  $p$ . Déterminer la loi du deuxième succès.

**15** Un joueur lance une pièce qui donne *face* avec probabilité  $\frac{1}{3}$ . S'il obtient *face* alors il tire une boule dans une urne contenant  $n$  boules, numérotées de 1 à  $n$  (où  $n \in \mathbb{N}^*$ ). Sinon, il tire une boule dans une urne contenant  $2n$  boules, numérotées de 1 à  $2n$ .

Soit  $X$  le numéro de la boule tirée.

On note  $F$  l'événement « Obtenir *face* lors du lancer de la pièce ».

1. Déterminer la loi de  $X$  sachant  $F$  et la loi de  $X$  sachant  $\bar{F}$ .
2. En déduire la loi de  $X$ .

**16** Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé.

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires iid suivant toutes la même loi que  $X$ .

Soit  $N$  une variable aléatoire indépendantes des  $X_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

Pour  $\omega \in \Omega$ , on pose  $S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega)$ .

1. Soit  $G_X, G_S$  et  $G_N$  les séries génératrices de  $X, S$  et  $N$ .  
Montrer que pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a  $G_S(t) = G_N \circ G_X(t)$ .
2. On suppose que  $X$  et  $N$  admettent une espérance.  
Montrer que  $S$  possède une espérance et la calculer.
3. On suppose que  $X$  et  $N$  ont un moment d'ordre 2.  
Montrer que  $S$  possède un moment d'ordre 2 et calculer la variance de  $S$ .

---

**17** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_n$  suit la loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ .

1. Déterminer  $P(X_1 \neq X_2)$ .
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ .  
Calculer  $P(Y_n > k)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . En déduire que  $Y_n$  suit une loi usuelle que l'on précisera.
3. Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ .  
Soit  $N$  une variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  qui suit la loi uniforme sur  $[[1, m]]$ .  
On suppose que  $N$  et les variables  $X_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  sont mutuellement indépendantes.  
Pour tout  $\omega \in \Omega$ , on pose  $Y(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega)$ .  
Déterminer la loi de  $Y$ .

---

**18** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires iid.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $P(X_n = -1) = p$  et  $P(X_n = 1) = 1 - p$  avec  $p \in [0, 1]$ .

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $Z_n = X_1 X_2 \dots X_n$  et  $a_n = P(Z_n = -1)$ .

1. Exprimer  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$  et en déduire  $a_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
2. Calculer l'espérance de  $Z_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
3. Calculer la covariance de  $Z_n$  et  $Z_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Donner  $\text{Cov}(Z_1, Z_2)$ . Qu'en déduit-on ?

---

**19** *Inégalité de Hoeffding*

1. Soit  $X$  une variable aléatoire telle que  $P(X = 1) = P(X = -1) = \frac{1}{2}$ .

Montrer qu'on a pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $E \exp(tX) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$ .

2. Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires iid de même loi que  $X$ .

On note pour tout  $n \geq 1$ ,  $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ .

Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a  $P(|S_n| > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2n}\right)$ .

---

**20** Soit  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . On pose pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$ ,  $Z_i = X_i X_{i+1}$ .

Calculer pour tout  $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ,  $\text{Cov}(Z_i, Z_j)$  et en déduire  $V\left(\sum_{i=1}^n Z_i\right)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .