On sait que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$ (*cf exercice 6* du chapitre SÉRIES NUMÉRIQUES).

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

On sait également qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\mathrm{H}_n = \gamma + \ln(n) + o(1).$$

On réordonne les termes de la série harmonique alternée de la manière suivante :
On commence par le premier terme négatif puis les deux premiers termes positifs, puis le terme négatif suivant, puis les deux termes positifs suivants, etc...
On obtient donc pour les premiers termes de la nouvelle série : $-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots$

On note $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des sommes partielles de cette nouvelle série.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}_{3n} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{H}_n - \mathrm{H}_{2n})$.
2. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_{3n} = -\frac{\ln 2}{2}$.
3. Montrer qu'on a également $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_{3n+1} = -\frac{\ln 2}{2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_{3n+2} = -\frac{\ln 2}{2}$.
4. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = -\frac{\ln 2}{2}$ (on pourra revenir à la définition de limite).

On en déduit que cette permutation de la série alternée converge et a pour somme $-\dfrac{\ln 2}{2}$.
La somme n'est donc pas la même !
Avec d'autres permutations, on peut même obtenir une série divergente !
Surpris ?

Corrigé :
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La somme S_{3n} va contenir les n premiers termes négatifs et les $2n$ premiers termes positifs. Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_{3n} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{2k}}{2k} = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= -\left(\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{H}_{2n} = -\mathrm{H}_{2n} + \frac{1}{2}\mathrm{H}_n + \frac{1}{2}\mathrm{H}_{2n} = \frac{1}{2}\big(\mathrm{H}_n - \mathrm{H}_{2n}\big).\end{aligned}$$

2. On a donc :

$$\mathrm{S}_{3n} = \frac{1}{2}\big(\gamma + \ln n + o(1) - \gamma - \ln(2n) + o(1)\big) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n}{2n}\right) + o(1) = -\frac{\ln 2}{2} + o(1).$$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_{3n} = -\frac{\ln 2}{2}$.
3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}_{3n+1} = \mathrm{S}_{3n} - \dfrac{1}{2n+1}$.
Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_{3n+1} = -\frac{\ln 2}{2}$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}_{3n+2} = \mathrm{S}_{3n+1} + \dfrac{1}{4n+2}$.
Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4n+2} = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_{3n+2} = -\frac{\ln 2}{2}$.
4. Soit $\varepsilon > 0$.
On sait qu'il existe :

- $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_1$, $\left|S_{3n} + \dfrac{\ln 2}{2}\right| \leq \varepsilon$
- $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_2$, $\left|S_{3n+1} + \dfrac{\ln 2}{2}\right| \leq \varepsilon$
- $n_3 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_3$, $\left|S_{3n+2} + \dfrac{\ln 2}{2}\right| \leq \varepsilon$.

Notons $N = \max(3n_1, 3n_2 + 1, 3n_3 + 2)$. Soit $m \in \mathbb{N}$ avec $m \geq N$.
On effectue la division euclidienne de m p ar 3.
Si m s'écrit $m = 3n$ alors $3n \geq N \geq 3n_1$ donc $n \geq n_1$ et donc $\left|S_m + \dfrac{\ln 2}{2}\right| \leq \varepsilon$.
Si m s'écrit $m = 3n + 1$ alors $3n + 1 \geq N \geq 3n_2 + 1$ donc $n \geq n_2$ et donc $\left|S_m + \dfrac{\ln 2}{2}\right| \leq \varepsilon$.
Si m s'écrit $m = 3n + 2$ alors $3n + 2 \geq N \geq 3n_3 + 2$ donc $n \geq n_3$ et donc $\left|S_m + \dfrac{\ln 2}{2}\right| \leq \varepsilon$.
Dans tous les cas, $\left|S_m + \dfrac{\ln 2}{2}\right| \leq \varepsilon$.
On a donc prouvé que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = -\dfrac{\ln 2}{2}$.