5.4 Equations de Maxwell-Exercice 3

On constate expérimentalement qu'une boule conductrice uniformément chargée en surface avec une charge Q_0, et abandonnée dans l'air, se décharge. Pour interpréter ce phénomène, on suppose que l'air est un milieu faiblement conducteur de conductivité γ : la densité de charge y est nulle et la densité de courant vérifie la loi d'Ohm. L'origine est prise au centre O de la boule de rayon R et on adopte les coordonnées sphériques.
A l'instant t, la boule porte la charge Q(t). On cherche le champ électromagnétique $\left\{ \vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t) \right\}$.

a-Déterminer $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ à l'extérieur de la boule.

b-Etablir l'équation différentielle vérifiée par Q(t) et la résoudre. Pourquoi les expériences d'électrostatique sont-elles plus difficiles à réaliser lorsque l'air est humide ?

c-Calculer de deux façons différentes l'énergie totale dissipée dans le milieu.

5.4 Equations de Maxwell-Exercice 3

On constate expérimentalement qu'une boule conductrice uniformément chargée en surface avec une charge Q_0, et abandonnée dans l'air, se décharge. Pour interpréter ce phénomène, on suppose que l'air est un milieu faiblement conducteur de conductivité γ : la densité de charge y est nulle et la densité de courant vérifie la loi d'Ohm. L'origine est prise au centre O de la boule de rayon R et on adopte les coordonnées sphériques.
A l'instant t, la boule porte la charge Q(t). On cherche le champ électromagnétique $\left\{ \vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t) \right\}$.

a-Déterminer $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ à l'extérieur de la boule.

b-Etablir l'équation différentielle vérifiée par Q(t) et la résoudre. Pourquoi les expériences d'électrostatique sont-elles plus difficiles à réaliser lorsque l'air est humide ?

c-Calculer de deux façons différentes l'énergie totale dissipée dans le milieu.

---

a-Invariance par toute rotation autour de O : $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ ne dépendent que de r

Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est plan de symétrie des charges : $\vec{E}(M,t)$ appartient à ce plan

Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ est plan de symétrie des charges : $\vec{E}(M,t)$ appartient à ce plan

$\vec{E}(M,t)$ appartient à ces deux plans donc il est radial : $\vec{E}(M,t) = E_r(r,t)\vec{u}_r$

D'après la loi d'Ohm, les courants seront radiaux : $\vec{j}(M,t) = \gamma\vec{E}(M,t) = j_r(r,t)\vec{u}_r$

Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est plan de symétrie des courants : $\vec{B}(M,t)$ perpendiculaire à ce plan

Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ est plan de symétrie des courants : $\vec{B}(M,t)$ perpendiculaire à ce plan

$\vec{B}(M,t)$ perpendiculaire à ces deux plans donc il est nul : $\vec{B}(M,t) = \vec{0}$

Théorème de Gauss pour la sphère (centre O, rayon r) passant par M : $4\pi r^2 E_r(r) = \dfrac{Q(t)}{\varepsilon_0}$

D'où : $\boxed{\vec{E}(M,t) = \dfrac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r}$

b-Equation de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0\left[\vec{j} + \varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right] = \vec{0}$

Donc : $\gamma\vec{E} + \varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$ => $\gamma\dfrac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \varepsilon_0\dfrac{\dot{Q}(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0$ => $\boxed{\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{\gamma}{\varepsilon_0}Q = 0}$

Solution : $\boxed{Q(t) = Q_0 \exp(-t/\tau)}$ avec $\tau = \varepsilon_0/\gamma$

Quand l'air est humide, sa conductivité γ augmente, donc la constante de temps τ diminue. La boule va se décharger plus vite, ce qui rend les expériences plus difficiles.

c-Méthode 1 : $U_{em}(t) = \iiint_{r>R}\dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau = \iiint_{r>R}\dfrac{1}{2}\varepsilon_0\dfrac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 r^4}r^2\sin\theta\, dr d\theta d\varphi = \dfrac{Q^2(t)}{8\pi\varepsilon_0 R}$

L'énergie dissipée est alors : $\boxed{-\Delta U_{em} = U_{em}(t=0) - U_{em}(t=\infty) = \dfrac{{Q_0}^2}{8\pi\varepsilon_0 R}}$

Méthode 2 : énergie dissipée = $\displaystyle\int_0^{+\infty} P dt$ où P est la puissance électromagnétique cédée à la matière

avec $P = \iiint_{r>R}\vec{j}.\vec{E}d\tau = \iiint_{r>R}\gamma E^2 r^2 dr\sin\theta d\theta d\varphi = \dfrac{\gamma Q_0^2\exp(-2t/\tau)}{4\pi\varepsilon_0^2 R}$ On retrouve le même résultat.
